

## تحليل الألعاب الثنائية ذات المجموع الصفري باستخدام الطريقة البيانية والبرمجة الخطية دراسة نظرية حول حالة تعدد نقاط التوازن في نظرية الألعاب

محمد عبد الله الشيخ  
الشركة الليبية للحديد والصلب  
إدارة المراجعة - قسم المراجعة الإدارية

أميمة سليم عبد التواب  
محاضر مساعد  
قسم إدارة الأعمال  
كلية الاقتصاد والعلوم السياسية  
جامعة مصراتة- ليبيا

د. عبد الله محمد الشيخ  
أستاذ مشارك  
قسم إدارة الأعمال  
كلية الاقتصاد والعلوم السياسية  
جامعة مصراتة- ليبيا

[omima.salim@eps.misuratau.edu](mailto:omima.salim@eps.misuratau.edu)

تاريخ النشر: 2026.04.01

تاريخ القبول: 2026.03.24

تاريخ الاستلام: 2026.02.21

الكلمات المفتاحية	الملخص
الألعاب الثنائية الصفيرية، تعدد الحلول، الطريقة البيانية، البرمجة الخطية	في النظرية الكلاسيكية لألعاب المجموع الصفري ثنائية اللاعبين (Two-Player Zero-Sum Games)، تؤدي الاستراتيجيات المثلى إلى حل أمثل وحيد يحقق نقطة توازن واحدة فقط لكل من المنافسين ( $ v = w $ )، وهذا يعني وجود قيمة واحدة فقط للمتغيرات $(p_i)$ ، والتي تمثل احتمالات استخدام اللاعب الأول لاستراتيجياته $(x_i)$ ، وتحقق قيمة المباراة $(v)$ ، والتي تعظم الحد الأدنى من العوائد، كما أنه يوجد قيمة واحدة لكل احتمال من احتمالات اللاعب الثاني $(q_j)$ ، والتي تعكس احتمالات استخدام استراتيجياته $(y_j)$ وتكون قيمة المباراة $(w)$ ، التي تقلل الحد الأقصى من الخسائر. تركز هذه الدراسة على تحليل حالة خاصة من حالات نظرية الألعاب، وهي وجود أكثر من نقطة توازن لطرفي الصراع، والتي تعني وجود أكثر من حل أمثل (عدد لا نهائي من الحلول المثلى) لكلا اللاعبين، وهو ما يعني وجود أكثر من توليفة من الاحتمالات $(p_i)$ تحقق أعلى قيمة لدالة هدف اللاعب الأول $(v)$ ، في المقابل يوجد أكثر من توليفة من الاحتمالات $(q_j)$ تحقق أدنى قيمة لدالة هدف اللاعب الثاني $(w)$ ، وكل ذلك في ظل تحقق علاقة التوازن بينهما ( $ v = w $ ). إن ما توصلت إليه هذه الدراسة يتمثل في فهم معمق لهذه الحالة، من خلال تحديد الظروف التي تفضي إلى وجود أكثر من نقطة توازن، وتحليل التوليفات التي تحقق حلولاً مثلى باستخدام كل من النهج البياني (GM) والبرمجة الخطية (LP)، ودراسة تأثير هذه الحلول على المنافس الآخر، كما درست إمكانية تعدد الحلول المثلى لكلا اللاعبين داخل ذات اللعبة.

### A Theoretical Study on the Case of Multiple Equilibrium Points in Game Theory An Analysis of Two-Player Zero-Sum Games Using the Graphical Method and Linear Programming

Dr. Abdalla Mohamad Elshaikh  
Department Of Business Administration  
Faculty of Economics and Political  
Sciences - Misurata University

Omaima Salim Abdel Tawab  
Department Of Business Administration  
Faculty of Economics and Political  
Sciences - Misurata University

Mohamad Abdalla Elshaikh  
Libyan Iron and Steel Company  
Audit Department

#### Abstract

In the classical theory of two-player zero-sum games, optimal strategies typically lead to a unique optimal solution characterized by a single equilibrium point for both players, where the game values coincide ( $|v = w|$ ). This implies the existence of a unique set of probability variables  $(p_i)$ , representing the first player's mixed strategy over its pure strategies  $(x_i)$ , which yields the game value  $(v)$  by maximizing the minimum payoff. Similarly, there exists a unique set of probability variables  $(q_j)$ , corresponding to the second player's mixed strategy over its pure strategies  $(y_j)$ , which yields the game value  $(w)$  by minimizing the maximum loss. This study focuses on analyzing a special case in game theory in which multiple equilibrium points exist for both competitors, implying the presence of more than one optimal solution - indeed, infinitely many optimal solutions for both players. In such cases, multiple probability combinations  $(p_i)$  achieve the maximum value of the first player's objective function  $(v)$ , while multiple probability combinations  $(q_j)$  attain the minimum value of the second player's objective function  $(w)$ , all while preserving the equilibrium condition ( $|v = w|$ ). The contribution of this study lies in providing a deeper understanding of this phenomenon by identifying the conditions that give rise to multiple equilibrium points, analyzing the strategic combinations that yield optimal solutions using both the graphical method (GM) and linear programming (LP), examining the impact of these solutions on the opposing player, and investigating the possibility of the coexistence of multiple optimal solutions for both players within the same game.

#### Keywords

**Two-Player Zero-Sum Games;**  
**Multiplicity of Optimal Solutions;**  
**Graphical Method;**  
**Linear Programming**

## 1. المقدمة

المباريات (*Two-Player Zero-Sum Games*)، وهي الحالة التي تعدد فيها الحلول المثلى للمباراة، بمعنى إنه يوجد أكثر من نقطة توازن (أكثر من نقطة حل) تكون فيها قيم الحل ( $v$ ) لهذه النقاط متساوية، وهذا يعني وجود أكثر من احتمال للاعب الأول ( $p_i$ ) أو وجود أكثر من احتمال للاعب الثاني ( $q_j$ ) يحقق القيم المثلى للمباراة. من خلال هذه الدراسة، نسعى إلى تقديم فهم معمق لحالات تعدد الحلول المثلى في النماذج الثنائية الصفرية، وتوضيح كيفية ظهور عدة استراتيجيات مثلى، وتأثيرها على صياغة واستقرار قرارات اللاعبين، ونولي اهتماماً خاصاً بمصفوفات الدفع من النوع ( $m \times 2$ ) أو ( $2 \times n$ )، لكي نتمكن من تحليل وتفسير هذا النوع من الحالات بيانياً باستخدام الطريقة البيانية (*Graphical Method*)، وإسقاط هذه التحليلات على نتائج المباراة الناتجة من استخدام طريقة البرمجة الخطية (*Linear Programming*)، لأنه عند تعدد استراتيجيات اللاعبين (أكثر من استراتيجيتين لكل منهما)، يتعذر تمثيل مصفوفة الدفع بيانياً.

## 2. طرق حل الألعاب الصفرية ثنائية اللاعبين:

توجد عدة طرق يمكن استخدامها في حل مسائل الألعاب الصفرية الثنائية، ومن أهم هذه الطرق وأكثرها شيوعاً، الطريقة البيانية (*Graphical Method - GM*) والبرمجة الخطية (*Linear Programming-LP*)، وتعد هاتان الطريقتين من الطرق الرئيسية المستخدمة في ذلك، ولأن هذه الدراسة تعتمد في تحليلها لحالة تعدد الحلول المثلى على الطريقة البيانية (*GM*)، ومن ثم إسقاط نتائج هذا التحليل على طريقة البرمجة الخطية (*LP*)، عليه سنقوم بعرض موجز لطريقة (*LP*) والنموذج الرياضي الذي يبجدها، وبالتالي عرض الطريقة البيانية التي سنعتمد عليها في تحليل وتفسير حالة تعدد الحلول المثلى، بالشكل الذي يمكننا من تحديد كافة الحلول المثلى وكيفية تحديدها وفقاً لطريقة (*LP*) (Von Neumann, 1928).

أ) طريقة البرمجة الخطية (*LP*)

تتيح البرمجة الخطية التعامل مع ألعاب ذات أبعاد كبير ( $m \times n$ )، وهذا ما تعجز عليه الطريقة البيانية المبسطة، لذلك يعد تطبيق البرمجة الخطية الوسيلة المثلى لإيجاد الاستراتيجيات المختلطة في ألعاب المجموع الصفري ذات لاعبين اثنين، في هذه الحالة لا يتوفر للاعبين استراتيجيات صرفه تكفل أفضلية مطلقة، مما يستدعي البحث عن خليط احتمالي يمكن كل لاعب من تحقيق أفضل عائد ممكن. كما إنها مفيدة بشكل خاص في الألعاب ذات المجموع الصفري، حيث يكون مقدار مكاسب (عوائد) أحد اللاعبين مساوي تماماً لمقدار خسارة للاعب الآخر، و تتم صياغة مشكلة الألعاب لعدد اثنين من

تُعد نظرية الألعاب، المعروفة أيضاً بنظرية المباريات، من أبرز الأدوات التحليلية في اتخاذ القرارات، إذ تقدم إطاراً رياضياً لفهم التفاعلات الاستراتيجية بين أطراف متنافسة، تركز هذه النظرية على تحليل مواقف تتضمن اتخاذ قرارات من قبل عدة أطراف تتداخل مصالحهم، مما يستلزم دراسة معمقة لفهم النماذج الاستراتيجية واستغلالها على النحو الأمثل، من خلال هذا النهج التحليلي المتقدم، أصبحت نظرية الألعاب ركناً أساسياً في فهم السلوكيات الاقتصادية والسياسية والاجتماعية، كما أنها تشكل قاعدة متينة لاتخاذ القرارات في بيئات تسودها المنافسة وعدم اليقين، وقد تطورت هذه النظرية لتشمل تطبيقات متعددة في الاقتصاد، والسياسة، والإدارة، والتسويق، وعلم الاجتماع، وعلم النفس، وعلوم الحاسوب، تحديداً في تصميم خوارزميات الذكاء الاصطناعي وأنظمة اتخاذ القرار الذاتي في بيئات معقدة.

تركز هذه الدراسة على نماذج المباريات الصفرية ذات لاعبين اثنين (*Two-Player Zero-Sum Games*)، حيث تعتبر المباريات الصفرية (*Zero-Sum Games*) نماذج رياضية تتصف بأن مكسب الطرف الأول (اللاعب الأول) هو خسارة بالضبط للطرف الآخر (اللاعب الثاني)، والعكس صحيح أي إجمالي المكاسب (مجموع مقدار الربح مع مقدار الخسارة) يساوي الصفر، حيث تنص نظرية (*Minimax*) لفون نيومان على أن في كل لعبة صفرية يوجد لكلا اللاعبين قيمة مشتركة ( $v$ ) بحيث:

$$v = E[p, q] \min_{p \in X} \max_{q \in Y} = E[p, q] \max_{q \in Y} \min_{p \in X}$$

إن هذه المعادلة تُعبر عن قيمة المباراة ( $v$ )، والتي تكون متساوية لكلا اللاعبين، حيث إن (*Minimax*) يضمن للاعب تحقيق الحد الأقصى من الأرباح التي يمكن تحقيقها، بمعنى تحقيق أقصى أدنيات الأرباح الممكنة، أما بالنسبة للاعب الآخر أو الخصم يضمن لنفسه أفضل حماية ضد أسوأ سيناريو، والذي يعني تحقيق أدنى أفضليات الخسائر. إن هذا التحليل (*Minimax Theorem*) يؤكد أن هاتين القيمتين متساويتان في الألعاب الصفرية ثنائية اللاعبين، ومن ثم تُعرف هذه القيمة المشتركة باسم ( $v$ )، وهي قيمة اللعبة باعتبارها نقطة توازن استراتيجية لكل من اللاعبين، والتي يتحدد عندها احتمالات ( $p_i$ ) لعب استراتيجيات اللاعب الأول ( $x_i$ )، احتمالات ( $q_j$ ) لعب استراتيجيات اللاعب الآخر ( $y_j$ ) (Von Neumann, 1928). ومن ناحية أخرى فإن هذه الدراسة تركز بشكل خاص على تحليل إحدى الحالات الخاصة التي يمكن أن تواجه هذا النوع من

- الاستراتيجيات المختلطة للاعب الأول (A).
- $v$ : تمثل أكبر عائد يضمنه اللاعب بغض النظر عن استراتيجيات المنافس (B).
- $a_{ij}$ : تمثل عناصر مصفوفة الدفع، بحيث تمثل ( $i$ ) الصفوف وهي استراتيجيات اللاعب (A)، وتمثل ( $j$ ) الأعمدة وهي استراتيجيات اللاعب (B).
- القيود:  $\sum_{i=1}^m p_i a_{ji} \leq v$  تضمن أن عائد اللاعب الأول (A) عند مواجهة كل استراتيجية ( $j$ ) من اللاعب الثاني (B) لا يقل عن قيمة المباراة ( $v$ ).
- **النموذج الرياضي للاعب (B):**  
ويكون النموذج الرياضي للاعب (Player B – Maximin) كما يلي:

$$Max w \dots \dots \dots (5)$$

$$ST: \sum_{j=1}^n q_j = 1, \forall j, (j = 1, 2, \dots, n) \dots \dots (6)$$

$$\sum_{j=1}^n q_j a_{ij} \geq w, \forall j, (i = 1, 2, \dots, m). (7)$$

$$q_j \geq 0 \dots \dots \dots (8)$$

حيث إن:

- $q_j$ : والتي تمثل ( $q_1, q_2, \dots, q_m$ ) هي احتمالات الاستراتيجيات المختلطة للاعب الأول (B).
- $w$ : تمثل أقل يمكن أن يتكبدها اللاعب بغض النظر عن استراتيجيات المنافس (A).
- $a_{ij}$ : تمثل عناصر مصفوفة الدفع، بحيث تمثل ( $i$ ) الصفوف وهي استراتيجيات اللاعب (A)، وتمثل ( $j$ ) الأعمدة وهي استراتيجيات اللاعب (B).
- القيود:  $\sum_{j=1}^n q_j a_{ij} \geq w$  تضمن أقل خسائر اللاعب الثاني (B) عند مواجهة كل استراتيجية ( $i$ ) من اللاعب الأول (A) لا يتجاوز قيمة المباراة ( $w$ ).

نتيجة قوة الازدواجية (*Strong Duality*) في البرمجة الخطية بين النموذجين الرياضيين السابقين، نصل إلى أن القيمة المثلى المتحققة (نتيجة المباراة) في النموذج الأولي ( $v$ ) تساوي القيمة المضادة في النموذج الثاني ( $w$ ). بفضل نظرية *Minimax* Von Neumann، تؤكد هذه النماذج أن الحلين متطابقان وقيمة اللعبة مشتركة ( $|v = w|$ )، وهو ما يدعم وجود توازن Nash في ألعاب صفرية ثنائية اللاعبين. إن هيكلية

اللاعبين (A, B) على شكل نموذجين رياضيين للبرمجة الخطية، بحيث يخص كل نموذج لاعب معين، ويكون النموذج الرياضي (*Minimax*) خاص باللاعب الأول (A) ويهدف إلى تعظيم الحد الأدنى للعوائد التي سيحصل عليها، ويكون هذا الهدف محدد بقيود وهي استراتيجيات اللاعب الثاني (B)، ويكون النموذج الرياضي (*Maximin*) خاص باللاعب الآخر (B) والذي يهدف إلى تقليل الحد الأقصى للخسائر التي قد يتكبدها، ويكون هذا الهدف محدد باستراتيجيات اللاعب الأول (A)، وبهذا يتم إيجاد نقطة التوازن والتي تكون عندها قيمة المباراة ( $v$ )، والتي يتساوى عندها عوائد اللاعب الأول (A) مع الخسائر التي يتكبدها اللاعب الآخر (B)، ويمكن توضيح النموذج الرياضي لهذه النظرية كالتالي: نفرض أن مصفوفة الدفع التالية لعدد اثنان من اللاعبين (A, B)، حيث يمتلك اللاعب (A) عدد ( $m$ ) من الاستراتيجيات ( $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ )، ويمتلك (B) عدد ( $n$ ) من الاستراتيجيات ( $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ ).

جدول رقم (1) مصفوفة الدفع للاعبين (A, B) من نوع ( $m \times n$ )

		B				
		$y_1$	$y_2$	$y_3$	...	$y_n$
A	$x_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	...	$a_{1n}$
	$x_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	...	$a_{2n}$
	$x_3$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	...	$a_{3n}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
	$x_m$	$a_{m1}$	$a_{m2}$	$a_{m3}$	...	$a_{mn}$
	$n$					

ومن هذه المصفوفة يمكن صياغة النماذج الرياضية لكلا اللاعبين (A, B) كما يلي (Thie & Keough, 2016):

- **النموذج الرياضي للاعب (A):**  
ويكون النموذج الرياضي للاعب (Player A – Minimax) كما يلي:

$$Min v \dots \dots \dots (1)$$

$$ST: \sum_{i=1}^m p_i = 1, \forall i, (i = 1, 2, \dots, m) \dots \dots (2)$$

$$\sum_{i=1}^m p_i a_{ji} \leq v, \forall j, (j = 1, 2, \dots, n) \dots (3)$$

$$p_i \geq 0 \dots \dots \dots (4)$$

حيث أن:

- $p_i$ : والتي تمثل ( $p_1, p_2, \dots, p_m$ ) هي احتمالات

الاستراتيجيتان التي ساهمت في تحديد الحل بالنسبة للاعب الأول، ويمكن توضيح ذلك كما في المثال التالي:

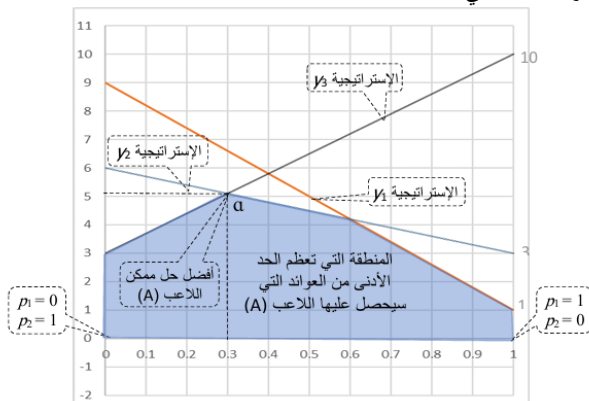
جدول رقم (2) مصفوفة الدفع للاعبين (A, B)

		B		
		$y_1$	$y_2$	$y_3$
A	$x_1$	1	3	10
	$x_2$	9	6	3

المصدر: الشيخ وآخرون (2025)

#### • حل المسألة بالنسبة للاعب (A)

في البداية يتم رسم المصفوفة بالنسبة للاعب (A) الذي يمتلك استراتيجيتين فقط ( $x_1, x_2$ )، والتي احتمالات وقوعهما هي ( $p_1, p_2$ ) على التوالي، ويتم تحديد منطقة الحلول الممكنة والمحددة باستراتيجيات للاعب (B) وهي ( $y_1, y_2, y_3$ )، والتي احتمال وقوعها ( $q_1, q_2, q_3$ ) على التوالي، وبما أن إن اللاعب (A) هو لاعب الأرباح يكون الرسم في الجانب الموجب على محاور الرسم وذلك كما يلي:



الشكل (1) حل المصفوفة الألعاب (2x3) بالنسبة للاعب الأرباح (A)

المصدر: (الشيخ وآخرون 2025)

يلاحظ من الشكل (1) إن النقطة (a) تمثل أفضل حل للاعب (A)، والتي تعظم الحد الأدنى من العوائد، وإن احتمال أن يستخدم هذا اللاعب الاستراتيجية ( $x_1$ ) هو ( $p_1 = 0.3$ )، واحتمال الاستراتيجية ( $x_2$ ) هو ( $p_2 = 0.7$ )، وقيمة المباراة تساوي ( $v = 5$ ). كما يلاحظ أن استراتيجيتي ( $y_2, y_3$ ) للاعب (B) هي فقط التي حددت نقطة الحل (a)، لذلك سيتم استبعاد ( $y_1$ ) باعتبارها استراتيجية غير نشطة، ويتم حل المصفوفة للاعب (B) على هذا الأساس.

#### • حل المسألة بالنسبة للاعب (B)

هنا يتم استبعاد الاستراتيجية ( $y_1$ ) ورسم مصفوفة اللاعب (B) على استخدام الاستراتيجيتين ( $y_2, y_3$ )، على افتراض أن اللاعب (B) هو لاعب الخسائر يكون شكل الرسم البياني كما في الشكل (2):

بناء النموذجين تظهر كيف أن كل لاعب يعمل وفق قيود الآخر، مما يعكس تعبير (*Maximin, Minimax*) في نظرية الألعاب، حيث تعكس استراتيجية (*Minimax*) سعى اللاعب لتحقيق أعلى قيمة مضمونة، وتمثل استراتيجية (*Maximin*) للمنافس، التي تهدف إلى تقليل أقصى الخسائر التي يمكن أن يتكبدها هذا اللاعب (لاعب الخسائر).

اعتمدنا في عملنا في هذه الدراسة على حل هذه النماذج الرياضية لكلا اللاعبين (A, B) باستخدام خوارزمية السمبلكس (*Simplex Algorithm*)، والتي تظهر قيمة المباراة ( $|v = w|$ )، احتمالات استخدام الاستراتيجيات المختلطة لكل لاعب من اللاعبين ( $p_i, q_j$ )، والجدير بالذكر هنا إن البرمجة الخطية تتعامل مع الألعاب ذات الحجم الكبير المعقدة، التي يصبح فيها الحل اليدوي يحتاج لجهد كبير وزمن طويل، لذلك في هذه الدراسة اعتمدنا على أداة (*Solver*) في تطبيق الإكسل (*Excel*) في حل هذه النماذج الرياضية الخطية.

#### (ب) الطريقة البيانية (GM)

أشار الشيخ وآخرون (2025)، إلى أن الطريقة البيانية تستخدم لحل مسائل نظرية الألعاب الثنائية (لها عدد 2 من اللاعبين)، وتكون فعالة في المسائل التي تكون مصفوفة الدفع فيها من نوع ( $2 \times n$ ) أو من نوع ( $m \times 2$ )، بمعنى مصفوفة تحتوي على عدد اثنين من الصفوف وعدد ( $n$ ) من الأعمدة، أو عدد اثنين من الأعمدة وعدد ( $m$ ) من الصفوف. والفكرة الكامنة وراء هذه الطريقة هو حل المصفوفة بالنسبة للاعب الذي عدد استراتيجياته اثنين، ومن هذا الحل يتم تحديد الاستراتيجيات النشطة للاعب الآخر، ومن تم حلها بالنسبة له، ويمكن تلخيص خطواتها كالتالي:

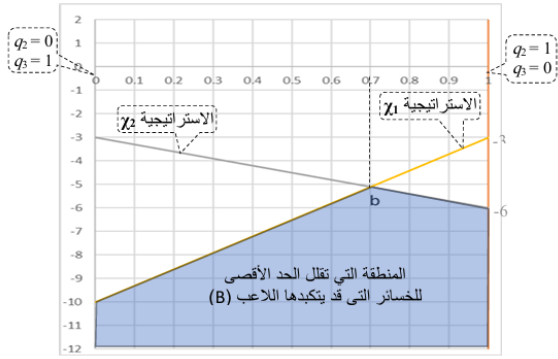
1. حل المسألة للاعب الأول (الذي يمتلك استراتيجيتين)، وذلك بتمثيل احتماليه على محوري الرسم البياني، ومن تم رسم استراتيجيات اللاعب الثاني على شكل خطوط مستقيمة بين محوري الرسم، والتي تعد قيود على اللاعب الأول.
2. تحديد منطقة الحلول الممكنة، التي تحقق أفضل النتائج بالنسبة للاعب الأول، في ظل القيود التي تمثلها استراتيجيات اللاعب الثاني، ومن تم تحدد نقطة الحل لهذا اللاعب الأول، وهي أعلى نقطة في منطقة الحلول إذا كان هذا اللاعب يحقق عوائد، أما إذا كان اللاعب هو لاعب الخسائر فتكون نقطة الحل هي النقطة تقلل الخسائر التي يمكن أن يتكبدها.
3. يتم تحديد الاستراتيجيات النشطة الخاصة للاعب الثاني، وهي الاستراتيجيتان التي تساهم في تحديد نقطة الحل للاعب الأول، وبمعنى آخر هو حذف الاستراتيجيات التي لم تساهم في تحديد نقطة الحل.
4. حل المصفوفة بالنسبة للاعب الثاني وذلك باستخدام

غير استراتيجيته وحده، أي أن كل لاعب يصل إلى وضع لا يفيد فيه تعديل قراره ما دام الآخرون ثابتين على قراراتهم. ثم وسع ناش (Nash, 1951) فكرته الأولى بتقديم برهان رياضي لوجود توازن ناش (*Nash Equilibrium*) في كل لعبة محدودة، مؤسسًا بهذا الإطار النظري الذي أصبحت تقوم عليه نظرية الألعاب الحديثة.

أقترح Maiti, et al (2023) خوارزمية جديدة وفعالة لاكتشاف جميع توازنات ناش (*Nash Equilibrium*) في ألعاب المصفوفات ثنائية اللاعبين ذات المجموع الصفري، دون الحاجة إلى فحص كل عناصر المصفوفة الضخمة، تعتمد الفكرة على استعلام الخانات الضرورية فقط، أي تلك التي تساعد في تحديد الصفوف والأعمدة التي تدخل فعليًا في تكوين توازنات ناش، وبذلك تتجاوز الخوارزمية الحاجة إلى قراءة المصفوفة بالكامل، مما يقلل كثيرًا من عدد الاستعلامات المطلوبة، كما تقدّم الدراسة تحليلًا يوضح أن هذا الأسلوب يستغل أصغر قدر ممكن من المعلومات اللازمة لحل المشكلة، وتبرهن أيضًا أنه لا توجد خوارزميات يمكنها أن تحقق تحسنًا جوهريًا في عدد الاستعلامات مقارنة بالطريقة المقترحة. أي أن الخوارزمية التي تقدمها الورقة تقترب إلى حد كبير من أفضل أداء نظري ممكن.

أشار Adler (2013) في ورقته، إلى وجود علاقة عميقة بين البرمجة الخطية (LP) والألعاب ثنائية اللاعبين ذات المجموع الصفري. يوضح Adler أن حل أي برنامج خطي يمكن تحويله مباشرة إلى حل لعبة مجموع صفري، والعكس صحيح، بحيث يصبح نموذج اللعبة مكافئًا تمامًا لنموذج البرمجة الخطية من حيث القدرة التعبيرية والحلول المثلى. وتعتمد الفكرة على إظهار أن القيود ودوال الهدف في البرمجة الخطية يمكن تمثيلها كلعبة يكون فيها اللاعبان في حالة تضارب كامل. كما يؤكد Adler أن هذه المكافأة ليست مجرد ملاحظة نظرية، بل تعكس ترابطًا جوهريًا بين الطريقتين يؤدي إلى فهم أعمق لبنى الحلول وطرق الوصول إلى الأمثلية. وتبرز هذه الورقة أن هذه المعادلة توفر منظورًا موحدًا يجمع بين أساليب التحليل في نظرية الألعاب والخوارزميات التقليدية في البرمجة الخطية، مما يعزز إمكانية الاستفادة من كلا المجالين في تطوير طرق حل أكثر فاعلية.

أقترح Dallant, et al (2024) طريقة أسرع لإيجاد النقطة الحرجة (Saddle Point) في المصفوفات، وهي نقطة توازن بين أفضل ما يستطيع أحد اللاعبين ضمانه، وأسوأ ما قد يواجهه ( $Value = maximin = minimax$ )، التي تمثل التوازن بين صفوف وأعمدة اللعبة أو المصفوفة، وذلك مقارنة بالطرق التقليدية التي تعتمد على الفرز الكامل، توضح الورقة أن خوارزميات الفرز ليست دائمًا الطريقة الأكثر كفاءة، وأنه يمكن استخدام أساليب تحليلية واستراتيجية لتحديد هذه النقطة بسرعة أكبر. تعتمد الفكرة على استغلال خصائص المصفوفة لتقليل عدد



الشكل (2) حل المصفوفة الألعاب (2×3) بالنسبة للاعب الخسائر (B) المصدر: (الشيخ وأخرون 2025)

ويلاحظ من الشكل (2) إن أفضل حل للاعب (B) يتحدد عند النقطة (b)، وهو الذي يقلل الحد الأقصى من الخسائر بناءً على استراتيجيات اللاعب الأول ( $X_1, X_2$ ). يتبين إنه عند هذه النقطة، إن قيمة ( $q_2$ ) وهو احتمال لعب الاستراتيجية الثانية ( $v_2$ ) يساوي ( $q_2 = 0.7$ )، كما إن ( $q_3$ ) وهو احتمال استخدام الاستراتيجية الثالثة ( $v_3$ ) يساوي ( $q_3 = 0.3$ )، وإن قيمة المباراة ( $w$ ) تساوي (-5).

### 3. الدراسات السابقة (Literature Review):

تنبثق نظرية الألعاب من الحقل الرياضي الاقتصادي، الذي يتناول التفاعلات الاستراتيجية بين اللاعبين الذين يتخذون قراراتهم وتؤثر على بعضها البعض، كانت البداية الفعلية لهذه النظرية عندما نشر (*Von Neumann & Morgenstern*) كتابهما الكلاسيكي *Theory of Games and Economic Behaviour* عام 1944، والذي مثل تأسيساً منهجياً للحقل باعتباره أداة تحليلية في الاقتصاد والسلوك الاستراتيجي، وقد أوضح فان *Morgenstern, Neumann* أن "للمشاكل النموذجية للسلوك الاقتصادي علاقة مباشرة بالمزيج الرياضي للألعاب، وأنه يمكن صياغة نماذج رياضية تصف هذه التفاعلات، ولم يقتصر تطبيقها على الاقتصاد فحسب، بل امتدت لاحقاً إلى العلوم السياسية والإدارة والبيولوجيا والحوسبة، مما يعكس طبيعتها متعددة التخصصات.

شهدت النظرية تطوراً نوعياً في خمسينيات القرن الماضي، عندما قدّم Nash (1950) في دراسته الأولى إضافة منهجية رائدة والتي مثّلت نقلة محورية في طرق تحليل المشاكل غير التعاونية بين اللاعبين، مفادها أن أي لعبة يشارك فيها عدة لاعبين تمتلك حالة مستقرة يسميها توازن ناش (*Nash Equilibrium*)، وهي وضع يختار فيه كل لاعب أفضل استراتيجية ممكنة بالنسبة له، بحيث لا يستطيع أي لاعب زيادة أرباحه إذا غير استراتيجيته بينما يبقى الآخرون على استراتيجياتهم. بمعنى آخر، يكون كل لاعب في أفضل رد ممكن على تصرفات الآخرين، بحيث لا يستطيع أي لاعب تحسين نتيجته إذا

هذا التمثيل البياني يتم تحديد الاستراتيجيتين اللتين تحققان قيمة أقصى الأذنيات (*Maximin*) بعد ذلك يتم استخدام هاتان الاستراتيجيتان لحل المصفوفة بالنسبة للاعب (B) مقابل جميع استراتيجيات اللاعب (A) وهي ( $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ )، وبهذا يتم اختصار لتكون على الشكل ( $m \times 2$ ) ليسهل حله بيانياً. وينطبق الإجراء نفسه إذا كان الاختيار للاعب (B)، حيث يتم تحديد الاستراتيجيات التي تحقق قيمة أدنى الأفضيات (*Minmax*)، وتصبح المصفوفة من نوع ( $2 \times n$ )، ومن ثم إيجاد حلها، لأنه وكما هو معروف في الأدبيات في هذا المجال إن الطريقة البيانية يمكنها فقط حل المصفوفات التي من نوع ( $m \times 2$ ) أو ( $2 \times n$ ).

قدّم الشيخ وآخرون (2025) دراسة تتناول حالة غير اعتيادية في تطبيق المنهج البياني لحل مسائل نظرية الألعاب عندما تكون مصفوفة الدفع من النوع ( $2 \times n$ ) أو ( $m \times 2$ )، أي عندما يمتلك أحد اللاعبين استراتيجيتين فقط. تقوم الطريقة البيانية على تمثيل استراتيجيات اللاعب ذي الاستراتيجيتين كمحاور للرسم، بينما تظهر استراتيجيات اللاعب الآخر كقيود تحدد الحل الأمثل. تكمن المشكلة التي تبحثها الورقة في الحالات التي تُحدّد فيها نقطة الحل بأكثر من قيدين، خلافاً للحالة التقليدية التي يعتمد فيها الحل على تقاطع قيدين فقط. تعتمد الورقة على أدوات البرمجة الخطية لتحليل هذه الحالة، وتركّز على كيفية استخدام الطريقة في تحديد القيود الزائدة التي يجب استبعادها عند الانتقال لحل مشكلة اللاعب الثاني. كما تبيّن الدراسة أثر استبعاد هذه القيود على النتيجة النهائية، وتوضح كيفية تحديد القيود النشطة الضرورية للوصول إلى الحل الأمثل (نقطة التوازن)، وتسهم النتائج في تعميق الفهم للمنهج البياني في الحالات الخاصة التي تطرح تحديات إضافية مقارنة بالصيغ التقليدية للمسألة. تتشابه هذه الدراسة مع دراسة الشيخ وآخرون في انطلاقتها من الإطار نفسه لنظرية ألعاب المجموع الصفري ثنائية اللاعبين، واعتمادها على كل من المنهج البياني والبرمجة الخطية لتحليل الحلول المثلى ونقاط التوازن. كما يشترك العلمان في الاهتمام بالحالات غير التقليدية التي لا تنطبق عليها الفروض القياسية البسيطة، سواء من حيث تعقيد القيود أو من حيث بنية الحل. غير أن نقطة الاختلاف الأساسية بين الدراستين تكمن في زاوية المعالجة؛ إذ تركز دراسة الشيخ وآخرون على حالة تتحدد فيها نقطة الحل بأكثر من قيد في مسائل من النوع ( $2 \times n$ ) أو ( $m \times 2$ )، وما يترتب على ذلك من ضرورة التمييز بين القيود النشطة والقيود الزائدة وأثر استبعادها على الحل النهائي. في المقابل، تركز هذه الدراسة على حالة أعمق تتمثل في وجود أكثر من نقطة توازن، أي عدد لا نهائي من الحلول المثلى لكلا اللاعبين، بما يعني تعدد توليفات الاحتمالات التي تحقق قيمة المباراة نفسها.

العمليات الحسابية المطلوبة، مع الحفاظ على دقة النتائج. وتقدّم الورقة خوارزمية عملية يمكنها العثور على هذه النقطة المخرجة بشكل أسرع من الفرز الكامل، خاصة في المصفوفات الكبيرة. كما توضح التجارب أن هذه الطريقة تحقق تحسّناً ملحوظاً في الأداء مقارنة بالطرق التقليدية. في النهاية، توفر الورقة رؤية جديدة لتسريع الحسابات في مشاكل الألعاب والمصفوفات دون فقدان الدقة.

في الدراسة التي طرحها Babichenko (2016) أوضح أنه عند البحث عن توازنات ناش التقريبية (*Approximate Nash Equilibria*) يحتاج في الأساس إلى عدد كبير من الاستعلامات (استكشافات العوائد)، وهي التوازنات التي لا تكون دقيقة تماماً لكنها قريبة من الحل الأمثل. وقد بيّن أيضاً أن حتى التوازنات التقريبية قد تتطلب عدداً كبيراً جداً من الاستعلامات حول عوائد اللاعبين، خصوصاً في الألعاب التي تتسم ببنية معقدة. وتركّز الورقة على تحديد أقل عدد من الاستعلامات الضرورية للوصول إلى توازن تقريبي، وتثبت وجود حدود دنيا قوية تجعل المشكلة صعبة حتى عند السماح بحلول غير دقيقة بالكامل. كما قدّم الباحث نماذج تُظهر أن أي خوارزمية تعتمد على استعلامات العوائد فقط لا يمكنها تجاوز هذه الحدود نظراً لتعقيد الطبيعة المعلوماتية للألعاب العامة. وتبرز النتائج أن إيجاد توازنات ناش التقريبي يتطلب جهداً كبيراً في أغلب الحالات، مما يعكس التحديات النظرية العميقة في هذا المجال.

ناقش Daskalakis, et al. (2009) الأساس النظري لإيجاد توازنات ناش التقريبية (*Approximate Nash Equilibria*)، وتركّز الورقة على دراسة مدى إمكانية الوصول إلى حلول تقرب من التوازن الدقيق (الأمثل) في الألعاب، تشير الورقة إلى أن السماح بأمش بسيط من التقريب في الحل لا يؤدي بالضرورة إلى تبسيط المشكلة، إذ قد يبقى العثور على توازن تقريبي مهمة معقدة من الناحية الحسابية، ويستعرض الباحثون حدوداً نظرية توضح المدى الذي يمكن عنده تبسيط المشكلة من دون فقدان جوهر السلوك الاستراتيجي للاعبين. كما تقدّم الورقة رؤية أعمق حول كيفية تأثير مقدار الخطأ المسموح به في تعريف التوازن على صعوبة الحساب. وتساهم هذه النتائج في إبراز صعوبة البحث عن توازنات ناش، حتى عند الاكتفاء بالحلول التقريبية، مما يساعد في فهم الحدود العملية للخوارزميات المصممة لهذا الهدف.

قدّم Kumar & Reddy (1999) منهجية مبسّطة لحل مصفوفات الألعاب التي من نوع ( $m \times n$ ) بين لاعبين (A, B)، تقوم فكرتها الأساسية على اختيار استراتيجيتين فقط لأحد اللاعبين، ثم تمثيل وتحليل المصفوفة بيانياً بناءً على استراتيجيات اللاعب الآخر. فإذا تم اختيار اللاعب (A) مثلاً، يتم رسم المصفوفة له بيانياً باستخدام جميع استراتيجيات اللاعب (B) وهي ( $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ )، ومن

**4. أهداف الدراسة**

قيمة المباراة وتكون مساوية لقيمة مباراة المنافس الأخر، كما يتضح ذلك في النقطة (a) للاعب الأول (A)، النقطة (b) للاعب الثاني (B)، كما يظهر في الشكلين السابقين (1، 2) على التوالي. إن هذه الدراسة تعنى بتحليل وفهم أبعاد حالة خاصة من حالات نظرية الألعاب، وهو وجود أكثر من نقطة توازن لطرفي الصراع، والتي تعني وجود أكثر من حل أمثل (عدد لا نهائي من الحلول المثلى) لأحد طرفي الصراع، فعلى سبيل المثال في حالة وجود أكثر من حل أمثل للاعب يعني وجود أكثر من قيمة للمتغيرات ( $p_i$ ) تحقق أفضل حل ( $v$ ) وهو تعظم الحد الأدنى من العوائد، بمعنى آخر إنه في حالة وجود أكثر من حل أمثل للاعب الأول (A)، فهذا يعني وجود أكثر من توليفة من الاحتمالات ( $p_i$ ) تحقق نفس قيمة الحل ( $v$ )، عند ضرب هذه الاحتمالات ( $p_i$ ) في معاملات مصفوفة الدفع ( $a_{ij}$ )، وبذلك تكون ( $\sum_{i=1}^m p_i a_{ji} = v$ ). أما في حالة وجود أكثر من حل أمثل للاعب الأخر (B)، فهذا يعني وجود أكثر من توليفة من الاحتمالات ( $q_j$ ) تحقق نفس قيمة الحل ( $w$ )، وذلك عند ضرب ( $q_j$ ) في معاملات مصفوفة الدفع ( $a_{ij}$ ) وبذلك تكون ( $\sum_{j=1}^n q_j a_{ij} = w$ ) المثلى أن يتحقق هذا شرط التوازن وهو ( $|v = w|$ ).

في هذه الدراسة نركز على تحليل حالة تعدد الحلول المثلى ضمن إطار ألعاب المجموع الصفري ثنائية اللاعبين، ونعمل على تحليلها بدقة باستخدام أدوات حل متقدمة، مع السعي لفهم منطقي شامل لآلية نشوئها. يسعى هذا التحليل إلى تشخيص هذه الحالة بدقة، لتقديم فهم معمق للنقاط التالية:

- ظروف حدوثها: متى تظهر عدة توزيعات مختلطة تمنح نفس قيمة اللعبة.
- آليات الوصول إليها: كيف يمكن تحديد توليفة جميع احتمالات الاستراتيجيات التي تمنحنا الحلول المثلى، في كلا الطريقتين المستخدمتين في الحل ( $LP, GM$ ).
- أثرها على المنافس الأخر: ما مدى تأثير هذه الحلول المثلى على المنافس الأخر.
- إمكانية حدوثها لكلا اللاعبين: هل يمكن أن يكون للاعبين عدة حلول مثلى في ذات الوقت (ذات اللعبة).

**7. التحليل التطبيقي لحالات تعدد الحلول المثلى في الألعاب الصفرية الثنائية:**

لكي تتمكن من الكشف عن النقاط التي سبق ذكرها في مشكلة الدراسة، وتقديم تحليل منطقي سليم يدعم فهمًا معمقًا للسياق الرياضي المطروح ضمن مشكلة الدراسة، فإن الأمر يتطلب اعتماد منهجية مزدوجة ( $LP, GM$ )، وتطبيقها على مثال عملي:

- البرمجة الخطية ( $LP$ ): تعد أداة فعالة في حل مسائل

تتناول هذه الدراسة الحالة الخاصة لتعدد الحلول المثلى في مسائل نظرية الألعاب، مع الاعتماد على التحليل الرياضي والبياني لمصفوفة الدفع للمسألة، لتوضيح الأسس التي تؤدي إلى ظهور أكثر من حل متوازن لنفس الموقف الاستراتيجي. وتهدف الدراسة إلى تحديد الفروض والقيود التي تسهم في نشوء هذا التعدد، وتحليل تأثيره على استقرار اللعبة وقيمة المباراة ( $v$ ) لكل من اللاعبين. كما تسعى الدراسة إلى استخدام التحليل الرياضي والبياني لتمييز الحلول المثلى المتعددة، وتقييم مستوى التقارب أو الاختلاف في قيم احتمالات اختيار كل استراتيجية وتأثيرها على المنافع المتوقعة لكل لاعب، وتحليل انعكاس ذلك على احتمالات اختيار الاستراتيجيات المثلى. ومن جهة أخرى، تهدف الدراسة إلى وضع إطار نظري منهجي يمكن من خلاله تقييم الحلول المثلى وفق معايير التوازن للاعبين، بما يسهم في تعميق الفهم الرياضي والبياني لظاهرة تعدد الحلول في نظرية الألعاب.

**5. أهمية الدراسة**

في ظل ندرة المراجع العربية التي تتناول ظاهرة تعدد الحلول المثلى في مسائل نظرية الألعاب، تكمن أهمية هذه الدراسة في تقديم معلومات علمية قيمة حول هذه الظاهرة وآليات ظهورها في الألعاب الاستراتيجية، مع توضيح كيفية ارتباط التحليل البياني للمصفوفة بالنموذج الرياضي للبرمجة الخطية. ومن جانب آخر، تتميز هذه الدراسة بدراسة هذه الحالات الخاصة لتعدد الحلول المثلى، وتحليل تأثيرها على قيمة المباراة واحتمالات اختيار الاستراتيجيات لكل لاعب. كما توفر الدراسة منهجًا لتقييم الحلول المثلى المتعددة، وفهم تأثير التفضيلات أو الاختيارات المختلفة على نتائج اللعبة، مما يتيح فهمًا أعمق للعلاقات بين الجانب البياني والجانب الرياضي في نظرية الألعاب.

**6. مشكلة الدراسة**

في الحالات الاعتيادية لنظرية المباريات الصفرية ذات لاعبين اثنين (*Two-Player Zero-Sum Games*)، يكون للمسألة حل أمثل وحيد، والذي يعني وجود نقطة توازن واحدة فقط لكل واحد من المنافسين، ويتحقق هذا التوازن بينهما عندما تكون ( $|v = w|$ )، وهذا يعني وجود قيمة واحدة فقط لكل متغير من متغيرات ( $p_i$ )، والتي تمثل احتمالات استخدام استراتيجيات اللاعب الأول ( $x_i$ )، وتحقق قيمة المباراة عند قيمة ( $v$ )، والتي تعظم الحد الأدنى من العوائد، كما إنه يوجد قيمة واحدة لكل احتمال من احتمالات ( $q_j$ )، والتي تعكس احتمالات استخدام استراتيجيات اللاعب الأخر ( $y_j$ ) عند قيمة المباراة ( $w$ )، والتي تقلل الحد الأقصى من الخسائر، وكل ذلك عندما تكون ( $|v = w|$ ). ويمكن تفسير ذلك بوجود نقطة وحيدة على الرسم البياني لكل منافس تحقق

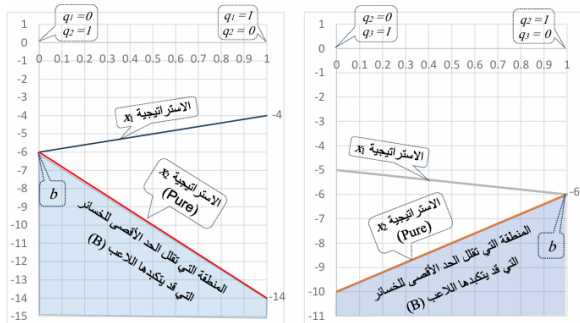


- تحديد نقطة تعادل اللاعب (B) عند النقطتين  $(a_1, a_2)$  الممثلتين لحلول اللاعب (A):

الشكل (4) يتضمن مخططين فرعيين داخل الوحدة البيانية، حيث يمثل كل مخطط جزءاً مستقلاً من التمثيل الكامل للمسألة، حيث يجسد فيها كل مخطط نقطة توازن للاعب (B) التي تناظر نقطة توازن معينة للاعب (A). إن الشكل (4 أ) يعكس نقطة توازن للاعب (B) عند توازن اللاعب (A) عند النقطة  $(a_1)$ ، ونظراً لأن هذه النقطة  $(a_1)$  تمثل تقاطع الاستراتيجيتين  $(y_2, y_3)$ ، كما هو موضح في الشكل (3)، فقد تم في هذا الرسم تمثيل لعبة اللاعب (B) باستخدامه هاتين الاستراتيجيتين  $(y_2, y_3)$ ؛ حيث يشير  $(q_2)$  إلى احتمال استخدام الاستراتيجية  $(y_2)$ ، ويشير  $(q_3)$  إلى احتمال استخدام الاستراتيجية  $(y_3)$ .

ويلاحظ من الشكل (4 أ)، إن النقطة (b) تمثل الحل الأمثل للاعب (B)، فهي تمثل أفضل نقطة حل في منطقة الحلول الممكنة (تقلل الحد الأقصى للخسائر التي يمكن أن يتكبدها)، وتكون نتيجة المباراة عند هذه النقطة  $(q_2 = 1, q_3 = 0, w = -6)$ ، كما إن  $(q_1 = 0)$ ، لأنه يمثل احتمال استخدام الاستراتيجية  $(y_1)$  وقد تم استبعادها من الرسم لأنها لم تشارك في تحديد النقطة  $(a_1)$ .

No.	$p_1$	$p_2$	$v$
	$p_1 = Pr(x_1)$	$p_2 = Pr(x_2)$	$v = \sum_{i=1}^m p_i a_{ij}$
1	0.2	0.8	6
2	0.3	0.7	6
3	0.4	0.6	6
4	0.5	0.5	6
5	0.6	0.4	6
6	0.7	0.3	6
7	0.8	0.2	6



الشكل (4 أ): تمثيل الحل الخاص باللاعب (B) باستخدام  $(y_2, y_3)$  عند النقطة (b) التي تمثل الحل للاعب (A)

الشكل (4 ب): تمثيل الحل الخاص باللاعب (B) باستخدام  $(y_2, y_3)$  عند النقطة (b) التي تمثل الحل للاعب (A)

الشكل (4): تمثيل الحل الخاص باللاعب (B) باستخدام  $(y_2, y_3)$  عند النقطة  $(a_1)$  التي تمثل الحل للاعب (A)

أكبر عائد ممكن  $(v = 6)$ . ويلاحظ أن النقطة  $(a_1)$  ناتجة من تقاطع القيدتين  $(y_2, y_3)$ ، وتتحقق عندما تكون قيمة  $(p_1 = 0.2)$  وهو احتمال استخدام الاستراتيجية الأولى  $(x_1)$ ، وبهذا يكون احتمال استخدام الاستراتيجية الثانية  $(x_2)$  يساوي  $(p_2 = 0.8)$ . أما بالنسبة للنقطة الحل الثانية  $(a_2)$  ناتجة من تقاطع القيدتين  $(y_1, y_2)$ ، وتتحقق عندما يكون احتمال استخدام الاستراتيجية الأولى  $(x_1)$  يساوي  $(p_1 = 0.8)$ ، وبهذا يكون احتمال استخدام الاستراتيجية الثانية  $(x_2)$  يساوي  $(p_2 = 0.2)$ .

والجدير بالذكر هنا إن كل النقاط الواقعة على القطعة المستقيمة  $(\overline{a_1 a_2})$ ، والمحصورة بين النقطتين  $(a_1, a_2)$ ، تعتبر حلول مثلى للمشكلة، فالنقاط الواقعة على هذه القطعة المستقيمة تعتبر من أعلى النقاط الواقعة في قمة منطقة الحلول الممكنة (تعظيم الحد الأدنى من العوائد  $(v = 6)$ ). وهذا يعني وجود عدد لا نهائي من الحلول، وهي محصورة من  $(p_1 = 0.2)$  إلى  $(p_1 = 0.8)$ ، وهذا يعني إن احتمالات استخدام الاستراتيجية الثانية  $(x_2)$  يكون محصورة بين  $(p_1 = 0.8, p_2 = 0.2)$ ، وإن استخدام أي توليفة بين  $(p_1, p_2)$  سيحقق نقطة التوازن والتي عندها تكون قيمة المباراة  $(v = 6)$ . والجدول التالي يوضح بعض الحلول المثلى للاعب (A) الواقعة على القطعة المستقيمة  $(\overline{a_1 a_2})$ ، التي تحقق نقطة التوازن عندما  $(v = 6)$ .

جدول (4) يبين بعض القيم لـ  $(p_i)$  التي تمثل حلولاً مثلى للاعب (A)

حيث:  $p_i = Pr(x_i)$  هي احتمال أن يستخدم اللاعب (A) الاستراتيجية  $(x_i)$ ، عندما  $(i = 1, 2, \dots, m)$

وبالإشارة إلى الشيخ وأخرون (2025)، فإن نقاط الحل الأمثل يمكن تحديدها من الشكل (3)، حيث يتبين إن الحل الأمثل عند النقطة  $(a_1)$  ناتج من تقاطع الإستراتيجيتين  $(y_2, y_3)$ ، الحل الأمثل عند النقطة  $(a_2)$  ناتج من تقاطع الإستراتيجيتين  $(y_1, y_2)$ ، أما بالنسبة لباقي الحلول المثلى المحصورة بين هاتين النقطتين (القطعة المستقيمة  $(\overline{a_1 a_2})$ ). وبهذا سيتم استخدام هذه التوليفة من الاستراتيجيات لإيجاد الحل باستخدام الطريقة البيانية للاعب (B).

• الحل بالنسبة للاعب (B) باستخدام الطريقة البيانية:

وبناء على ما ذكر سنقوم بإيجاد نقطة أو نقاط التوازن الخاصة باللاعب (B)، عند نقاط التوازن الخاصة باللاعب (A)، والتي عندها تكون  $(w)$  قيمة المباراة للاعب (B) تعادل قيمة المباراة  $(v)$  للاعب (A)، بمعنى عندما تكون  $(|v = w|)$ . ويمكن إيجاد ذلك بيانياً وذلك كما يلي:

سيستخدم دائما هذه الاستراتيجية ( $y_2$ )، وهذا يعني أن احتمال استخدامها ( $q_2 = 1$ )، وهذا ما يتضح من الشكل البياني (4 أ و 4 ب). من الجدير بالذكر أنه لا يمكن تمثيل هذه الحالة بيانياً، وذلك لأن الرسم البياني يعتمد على وجود محورين لتمثيل استراتيجيتين، حيث تُخصص كل استراتيجية لأحد المحاور. وفي هذه الحالة، لا يتوفر عدد كافٍ من الاستراتيجيات لإجراء التمثيل البياني. إلا أنه يمكن تمثيل هذه الحالة على شكل مصفوفة دفع من نوع ( $2 \times 1$ )، بمعنى عدد استراتيجيتين للاعب (A) واستراتيجية واحدة للاعب (B) كما يلي:

جدول (5) مصفوفة الدفع للاعبين بعد اختصار الاستراتيجيتين ( $y_1, y_2$ )

		B	
		j	$y_2$
A	i	$x_1$	6
		$x_2$	6

في هذه الحالة (الحلول عند القطعة المستقيمة  $(\overline{a_1 a_2})$ )، يتضح من مصفوفة الدفع هذه أن اللاعب (B) يعتمد دائماً على الاستراتيجية ( $y_2$ ) بصيغة استراتيجية صرفة، إذ يتضح أن احتمالها هو الواحد الصحيح ( $q_2 = 1$ )، وفي الوقت نفسه، لوحظ أن قيم العوائد لكلتا استراتيجيتي اللاعب (A) متساوية، بمعنى أن ( $x_1 = x_2 = 6$ )، مما يجعل اللاعب (A) غير مبال بين اللعب ب ( $x_1$ ) أو ( $x_2$ ) وبالتالي، يعد ( $p_1$ ) هو المكمل العددي ل ( $p_2$ ) والعكس أيضاً، انطلاقاً من العلاقة الأساسية ( $p_1 + p_2 = 1$ ).  
ثانياً- حل المسألة باستخدام طريقة البرمجة الخطية:

وكما سبق الذكر ولكي تتمكن من حل مسألة الألعاب باستخدام طريقة البرمجة الخطية، يتم صياغة مشكلة الألعاب على شكل نموذجين رياضيين للبرمجة الخطية، بحيث يخص النموذج الرياضي الأول (*Minimax*) اللاعب الأول (A) ويهدف إلى تعظيم الحد الأدنى للعوائد، ويكون النموذج الرياضي الثاني (*Maximin*) خاص باللاعب الآخر (B) والذي يهدف إلى تقليل الحد الأقصى للخسائر، وذلك كما يلي:

• النموذج الرياضي للاعب الأول (Player A – Min):

بناء على مصفوفة الدفع لهذه المسألة كما هي موضحة في الجدول (2)، التي تتعدد فيها الحلول المثلى للاعب (A)، ويكون النموذج الرياضي لهذا اللاعب كما يلي:

$$\text{Min } (z) = x_1 + x_2 \dots \dots \dots (9)$$

المخطط (4 ب) يعكس نقطة توازن اللاعب (B) عند توازن اللاعب (A) عند النقطة ( $a_2$ )، وهي ناتجة من تقاطع الاستراتيجيتين ( $y_1, y_2$ )، كما هو موضح في الشكل (3)، لذلك هنا تم تمثيل لعبة اللاعب (B) باستخدامه هاتين الاستراتيجيتين؛ حيث يشير ( $q_1$ ) إلى احتمال استخدام ( $y_1$ )، ويشير ( $q_2$ ) إلى احتمال ( $y_2$ ). ويلاحظ في الشكل (4 ب)، إن النقطة ( $b$ ) تمثل الحل الأمثل للاعب (B)، والتي تقلل الحد الأقصى لخسائره، وتكون نتيجة المباراة عند هذه النقطة ( $w = -6, q_1 = 0, q_2 = 1$ )، كما إن ( $q_3 = 0$ )، لأنه يمثل احتمال استخدام ( $y_3$ )، وقد تم استبعادها لأنها لا تشارك في تحديد النقطة ( $a_2$ ).

في كلا المخططين الفرعيين (4 أ و 4 ب)، يُلاحظ أن الاستراتيجية ( $x_2$ ) تعد استراتيجية صرفة (*Pure Strategy*)، لأن احتمال استخدامها يساوي الواحد الصحيح ( $p_2 = 1$ )، بينما جميع الاحتمالات الأخرى ( $p_i = 0$ )؛ وهي الاستراتيجية الوحيدة التي تساهم فعلياً في تحديد الحلول الممكنة للاعب (B) ضمن منطقة الحلول الممكنة (*Feasible Region*)، ولهذا، فإن الحل الأمثل يمكن التوصل إليه من خلال رسم هذه الاستراتيجية فقط، واعتبار باقي الاستراتيجيات فائضة (*dominant or redundant strategies*)، دون الحاجة إلى تمثيلها في التحليل.

- تحديد نقطة تعادل اللاعب (B) عند نقاط القطعة المستقيمة  $(\overline{a_1 a_2})$  (المثثلة لحلول اللاعب (A)):  
ويلاحظ من الشكل (3)، إن الحلول المثلى للاعب (A) والواقعة على القطعة المستقيمة  $(\overline{a_1 a_2})$  محددة (واقعة) على جزء من الاستراتيجية ( $y_2$ ) فقط، وإن نتيجة المباراة عند هذه القطعة  $(\overline{a_1 a_2})$  دائماً ( $v = 6$ ).

كما يلاحظ إن هذه القطعة المستقيمة تعكس الحلول المثلى لهذا اللاعب (A)، وهي محصورة بالنسبة لاحتمال الاستراتيجية الأولى من ( $p_1 = 0.2$ ) إلى احتمال ( $p_1 = 0.8$ )، بمعنى ( $p_1 = 0.2, 0.3, 0.4 \dots 0.8$ )، وعند قيم هذه الاحتمالات تكون دائماً قيمة المباراة ( $v = 6$ )، وهذا يعني في المقابل أن قيم احتمالات ( $p_2$ ) يمكن أن تكون ( $0.2, 0.6, 0.7, 0.8, p_2 = 0.8$ ). بمعنى إنه عندما ( $p_1 = 0.2$ ) تكون ( $p_2 = 0.8$ )، وعندما ( $p_1 = 0.3$ ) تكون قيمة ( $p_2 = 0.7$ )، إلى أن ( $p_1 = 0.8$ ) وعندها تكون قيمة ( $p_2 = 0.2$ ).

ونظراً لأن قيم هذه الاحتمالات ( $p_i$ ) واقعة على الاستراتيجية ( $y_2$ ) دون غيرها، فهذا يعني أن اللاعب ولللاعب (B)

- قيمة دالة الهدف ( $z$ ): تظهر في الصف (changing Va Reference) تساوي ( $z = 0.166666667$ )
- قيمة المتغير ( $x_1$ ): تظهر في الصف (changing Va X1) تساوي ( $x_1 = 0.133333333$ )
- قيمة المتغير ( $x_2$ ): تظهر في الصف (changing Va X2) تساوي ( $x_2 = 0.033333333$ )
- وبناءً على المعادلتين (14، 15) فإن قيم نتيجة المباراة لهذا اللاعب (A) كالتالي:

$$v = \frac{1}{0.166666667} = 6$$

$$p_1 = 0.133333333 \times 6 = 0.8$$

$$p_2 = 0.033333333 \times 6 = 0.2$$

وبالرجوع إلى الحل بالطريقة البيانية وتحديد الشكل (3)، ويلاحظ هنا إن هذا الحل يمثل الحل عند النقطة ( $a_2$ )، والتي عندها نتيجة المباراة ( $v = 6, p_1 = 0.8, p_2 = 0.2$ ).

كما يلاحظ من الجدول (5) إنه يوجد بعض المتغيرات الإضافية (*Slack variables*) والتي اختصارها ( $S_i$ ) تساوي الصفر، حيث يتبين إن ( $S_1 = 0$ ) حيث تظهر قيمته تساوي الصفر وذلك في الصف (*c1 Reference*) تحت العمود (*Slack*)، وكذلك الأمر بالنسبة ( $S_2 = 0$ )، كما تظهر في الصف ( $c_2$ ) (*Reference*). وهذا يعني إن المتغيرين ( $S_1, S_2$ ) لم يشاركا في حل النموذج الرياضي، وإذا تبين إن أحد هذان المتغيران سعر ظله (*Shadow Price*) في تحليل الحساسية يساوي الصفر، فهذا يعني إنه يوجد حل آخر لهذه المسألة. وفعلاً يلاحظ من تقرير الحساسية (*Sensitivity Report*) الجدول (6)، إن سعر الظل (*Shadow Price*)، للمتغير ( $S_1$ ) يساوي الصفر كما هو واضح في الصف (*c1 Reference*) تحت العمود (*Shadow Price*).

جدول (6) تقرير الحساسية (*Sensitivity Report*) الخاص باللاعب

**A**، الناتج عن أداة (*Solver*)

Microsoft Excel 16.0 Sensitivity Report						
Worksheet: [Multiple optimal solutions.xlsx] Min (A)						
Report Created: 2025-07-27 12:27:34 PM						
Variable Cells						
Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$11	changing Va X1	0.133333333	0	1	0	0.714285714
\$C\$11	changing Va X2	0.033333333	0	1	2.5	0
Constraints						
Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$E\$12	c1 Reference	1	0	1	1	0.333333333
\$E\$13	c2 Reference	1	0.166666667	1	0.5	0.25
\$E\$14	c3 Reference	1.5	0	1	0.5	1E+30

ST:

$$4x_1 + 14x_2 \geq 1 \dots (10)$$

$$6x_1 + 6x_2 \geq 1 \dots (11)$$

$$10x_1 + 5x_2 \geq 1 \dots (12)$$

$$x_i \geq 0 \dots \dots \dots (13)$$

وتكون نتيجة المباراة للاعب (A):

$$v = \frac{1}{z} \dots \dots \dots (14)$$

$$p_i = x_i v \dots \dots \dots (15)$$

حيث أن:

$z$ : تمثل دالة الهدف للنموذج الرياضي الذي يهدف إلى (*Min*).

$x_i$ : المتغيرات القرارية للاعب (A) الخاص بالإستراتيجيات (*i*).

$v$ : قيمة المباراة للاعب (A).

$p_i$ : احتمال أن يقوم اللاعب (A) استخدام الإستراتيجية ( $x_i$ ).

- حل نموذج اللاعب (A) باستخدام أداة (*Solve*) في تطبيق (*Excel*)

عند حل هذا النموذج باستخدام أداة (*Solve*) في تطبيق (*Excel*) تظهر النتائج كما الجدولين التاليين:

جدول (5) تقرير الإجابة (Answer Report) الخاص باللاعب A، الناتج عن أداة (*Solver*)

Microsoft Excel 16.0 Answer Report					
Worksheet: [Multiple optimal solutions.xlsx] Min (A)					
Report Created: 2025-07-27 12:27:34 PM					
Result: Solver found a solution. All Constraints and optimality conditions are satisfied.					
Solver Engine					
Engine: Simplex LP					
Solution Time: 0.031 Seconds.					
Iterations: 3 Subproblems: 0					
Solver Options					
Max Time Unlimited, Iterations Unlimited, Precision 0.000001					
Max Subproblems Unlimited, Max Integer Sols Unlimited, Integer Tolerance 1%, Assume Non-negative					
Objective Cell (Min)					
Cell	Name	Original Value	Final Value		
\$E\$11	changing Va Reference	0.166666667	0.166666667		
Variable Cells					
Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer	
\$B\$11	changing Va X1	0.133333333	0.133333333	Contin	
\$C\$11	changing Va X2	0.033333333	0.033333333	Contin	
Constraints					
Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
\$E\$12	c1 Reference	1	\$E\$12=\$G\$12	Binding	0
\$E\$13	c2 Reference	1	\$E\$13=\$G\$13	Binding	0
\$E\$14	c3 Reference	1.5	\$E\$14=\$G\$14	Not Binding	0.5

يتبين من الجدول (5)، التالي:

جدول (8) الجدول النهائي لطريقة السمبلكس الذي يمثل الحل عند النقطة (a1) للاعب (A)

Cj		1	0	0	0	0	M	M	M	Ratio	
e <sub>i</sub>	B.V	Q	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	
0	S <sub>1</sub>	1	0	0	1	-4	2	-1	4	-2	1/2
1	x <sub>1</sub>	1/30	1	0	0	1/6	-1/5	0	-1/6	1/5	-1/6
1	x <sub>2</sub>	2/15	0	1	0	-1/3	1/5	0	1/3	-1/5	2/3
E <sub>j</sub> = Σe <sub>i</sub> . a <sub>ij</sub>		1/6	1	1	0	-1/6	0	0	1/6	0	
C <sub>j</sub> - E <sub>j</sub>		0	0	0	1/6	0	0	M	M-1/6	M	

من هذا الجدول نلاحظ أن:

$$z = 1/6, S_1 = 1, x_1 = 1/30, x_2 = 2/15$$

وبناءً على المعادلتين (14، 15) فإن قيم نتيجة المباراة لهذا اللاعب (A) كالتالي:

$$v = \frac{1}{1/6} = 6$$

$$p_1 = 1/30 \times 6 = 0.2$$

$$p_2 = 2/15 \times 6 = 0.8$$

ويلحظ من الشكل (3)، الذي يمثل الحل وفقاً للطريقة البيانية،

إن هذا الحل يمثل الحل عند النقطة (a1)، حيث تكون نتيجة المباراة عندها (v = 6, p<sub>1</sub> = 0.2, p<sub>2</sub> = 0.8).

وكذلك الأمر فمن من الجدول السابق (8) يمكن الرجوع إلى

نقطة الحل عند النقطة (a2)، وذلك بإحلال المتغير (S<sub>3</sub>) محل المتغير (S<sub>1</sub>).

#### • النموذج الرياضي للاعب الثاني (Player B - Max):

بناءً على مصفوفة الدفع بالجدول (2)، ويكون النموذج الرياضي لهذا اللاعب كما يلي:

$$\text{Max}(z) = y_1 + y_2 + y_3 \dots \dots \dots (16)$$

ST:

$$4y_1 + 6y_2 + 10y_3 \leq 1 \dots (17)$$

$$14y_1 + 6y_2 + 5y_3 \leq 1 \dots (18)$$

$$y_j \geq 0 \dots \dots (19)$$

وتكون نتيجة المباراة للاعب (B):

$$w = \frac{1}{z} \dots \dots \dots (20)$$

$$q_j = y_j w \dots \dots \dots (21)$$

حيث أن:

z : تمثل دالة الهدف للنموذج الرياضي الذي يهدف إلى

(Max).

والجدير بالذكر، إن أحلال المتغير (S<sub>1</sub>) محل المتغير (S<sub>3</sub>) سوف نتحصل على الحل الأمثل الأخر والذي يتمثل عند النقطة (a1)، والتي عندها نتيجة المباراة (v = 6, p<sub>1</sub> = 0.2, p<sub>2</sub> = 0.8).

ويمكن الوصول إلى هذا الحل (الانتقال من الحل عند النقطة (a2) إلى الحل عند النقطة (a1)) كما في الفقرة التالية:

عملية الانتقال من الحل عند النقطة (a2) إلى الحل عند النقطة (a1)

يتم الانتقال من الحل (a2) إلى الحل عند النقطة (a1)، والذي يعني إيجاد الحل الأمثل الأخر (a1)، عن طريق إدخال المتغير (S<sub>1</sub>) لأن قيمته في الصف (C<sub>j</sub> - E<sub>j</sub>) تساوي صفراً، وهذا يعني إن دالة الهدف (v) لن تتغير، ليحل محله (إخراج) المتغير (S<sub>3</sub>)، كما هو موضح في الجدول (7) والذي يمثل الحل الأمثل عند النقطة (a2) وفق طريقة السمبلكس.

جدول (7) الجدول النهائي لطريقة السمبلكس الذي يمثل الحل عند النقطة (a2) للاعب (A)

Cj		1	1	0	0	0	M	M	M	Ratio	
e <sub>i</sub>	B.V	Q	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	
0	S <sub>2</sub>	1/2	0	0	1/2	-2	1	-1/2	2	-1	1 1/3
1	x <sub>1</sub>	2/15	1	0	1/10	-7/30	0	-1/10	7/30	0	1 1/3
1	x <sub>2</sub>	1/30	0	1	-1/10	1/15	0	1/10	-1/15	0	-1/3
E <sub>j</sub> = Σe <sub>i</sub> . a <sub>ij</sub>		1/6	1	1	0	-1/6	0	-0	1/6	0	
C <sub>j</sub> - E <sub>j</sub>		0	0	0	0	1/6	0	0	M-1/6	M	

من هذا الجدول نلاحظ أن:

$$z = 1/6, S_3 = 1/2, x_1 = 2/15, x_2 = 1/6$$

وبناءً على المعادلتين (14، 15) فإن قيم نتيجة المباراة لهذا اللاعب (A) كالتالي:

$$v = \frac{1}{1/6} = 6$$

$$p_1 = 2/15 \times 6 = 0.8$$

$$p_2 = 1/30 \times 6 = 0.2$$

كما سبق الذكر، فإن هذا الحل يمثل الحل عند النقطة (a2)، حيث عندها تكون (v = 6, p<sub>1</sub> = 0.8, p<sub>2</sub> = 0.2). وعند القيام بهذه العملية (إحلال المتغير (S<sub>1</sub>) محل المتغير (S<sub>2</sub>))، يتم الحصول على الحل الأمثل عند النقطة (a1)، ويتضح ذلك من الجدول (8) الذي يمثل الحل الأمثل عند هذه النقطة (a1) وفق طريقة السمبلكس.

$$q_2 = 0.166666667 \times 6 = 1$$

$$q_3 = 0 \times 6 = 0$$

وبالرجوع إلى الحل بالطريقة البيانية وتحديد الشكل (4)، ويلاحظ أن هذا الحل يمثل الحل عند النقطة (b)، والتي عندها تكون نتيجة المباراة (w = -6, q<sub>1</sub> = 0, q<sub>2</sub> = 1, q<sub>3</sub> = 0). كما يلاحظ من تقرير الحساسية (Sensitivity Report) الجدول (6)، إن كافة أسعار الظل (Shadow Price)، للمتغير الإضافية (S<sub>i</sub>) لا يساوي الصفر، وهذا يعني إن للاعب (B) حل وحيد متمثل في هذا الحل (w = -6, q<sub>1</sub> = 0, q<sub>2</sub> = 1, q<sub>3</sub> = 0).

جدول (10) تقرير الحساسية (Sensitivity Report) الخاص باللاعب

B، الناتج عن أداة

Microsoft Excel 16.0 Sensitivity Report						
Worksheet: [Multiple optimal solutions.xlsx] Max (B)						
Report Created: 2025-07-28 10:43:02 PM						
Variable Cells						
Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$C\$11	changing Va y1	0	-1	1	1	1E+30
\$D\$11	changing Va y2	0.166666667	0	1	0.2	0.25
\$E\$11	changing Va y3	1.38778E-17	0	1	0.5	0.166666667
Constraints						
Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$F\$13	c2 Reference	1	0.133333333	1	6.93889E-1	0.5
\$F\$12	c1 Reference	1	0.033333333	1	1	6.93889E-17

## 8. الاستنتاجات: (Conclusions)

في هذه الدراسة تم دراسة وتحليل حالة تعدد الحلول المثلى في الألعاب الثنائية ذات المجموع الصفري، من خلال تحليل تطبيقي اعتمد على الطريقة البيانية وأساليب البرمجة الخطية، وقد أسهم هذا النهج في تعميق الفهم لألية توازن الاستراتيجيات بين اللاعبين وفقاً لنظرية فون نيومان، حيث يتضح أن لكل من اللاعبين قيمة مشتركة في هذه الألعاب (|v = w|)، كما توصلت الدراسة لفهم منطقي شامل لألية نشوئها وفق المنهج البياني وأسلوب البرمجة الخطية، ويمكن تلخيص الاستنتاجات الخاصة بهذه الدراسة والمتمثلة في التساؤلات التي تم طرحها في مشكلة الدراسة، وهي كما يلي:

1. ظروف حدوثها: يمكن أن تتعدد الحلول المثلى لإحدى اللاعبين، إذا كان فقط للاعب الأخر استراتيجية مهيمنة (مسيطرة) على باقي استراتيجياته (استراتيجية صرفة)، مما يعني إن هذا اللاعب دائماً سيستخدم هذه الاستراتيجية، كما يشترط أن تكون عناصر هذه الاستراتيجية (متساوية)، بمعنى أن تكون قيم عناصر الصف أو العمود الممثل لهذه الاستراتيجية متساوية، وهذا طبعاً يعني إن اللاعب الأول يمكنه استخدام أي من استراتيجياته، وسيحصل على نفس النتيجة، وهذا ما يعني تعدد الحلول المثلى له، كما يتضح ذلك من مصفوفة الدفع الممثلة في الجدول (2) والشكل البياني (3).

y<sub>j</sub>: المتغيرات القرارية للاعب (B) الخاص بالإستراتيجيات (j).

w: قيمة المباراة للاعب (B).

q<sub>j</sub>: احتمال أن يقوم اللاعب (B) استخدام الإستراتيجية (y<sub>j</sub>).

- حل نموذج اللاعب (B) باستخدام أداة (Solve) في تطبيق (Excel)

عند حل هذا النموذج باستخدام أداة (Solve) في تطبيق (Excel) تظهر النتائج كما الجدولين التاليين:

جدول (9) تقرير الإجابة (Answer Report) الخاص باللاعب B،

الناتج عن أداة (Solver)

Microsoft Excel 16.0 Answer Report				
Worksheet: [Multiple optimal solutions.xlsx] Max (B)				
Report Created: 2025-07-28 10:43:02 PM				
Result: Solver found a solution. All Constraints and optimality conditions are satisfied.				
Solver Engine				
Engine: Simplex LP				
Solution Time: 0.031 Seconds.				
Iterations: 3 Subproblems: 0				
Solver Options				
Max Time Unlimited, Iterations Unlimited, Precision 0.000001				
Max Subproblems Unlimited, Max Integer Sols Unlimited, Integer Tolerance 1%, Assume Non-Negative				
Objective Cell (Max)				
Cell	Name	Original Value	Final Value	
\$F\$11	changing Va Reference	0.166666667	0.166666667	
Variable Cells				
Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer
\$C\$11	changing Va y1	0	0	Contin
\$D\$11	changing Va y2	0.166666667	0.166666667	Contin
\$E\$11	changing Va y3	1.38778E-17	1.38778E-17	Contin

يتبين من الجدول (9)، التالي:

- قيمة دالة الهدف (Max z): تظهر في الصف (changing Va Reference) تساوي (z = 0.166666667)

- قيمة المتغير (y<sub>1</sub>): تظهر في الصف (changing Va y1) تساوي (y<sub>1</sub> = 0)

- قيمة المتغير (y<sub>2</sub>): تظهر في الصف (changing Va X2) تساوي (y<sub>2</sub> = 0.166666667)

- قيمة المتغير (y<sub>3</sub>): تظهر في الصف (changing Va X2) تساوي (y<sub>3</sub> = 1.38778E-17 ≈ 0)

وبناءً على المعادلتين (20، 21) فإن قيم نتيجة المباراة لهذا اللاعب (A) كالتالي:

$$w = \frac{1}{0.166666667} = 6$$

$$q_1 = 0 \times 6 = 0$$

وتسهم هذه الخلاصة في توضيح السلوك الاستراتيجي في الحالات الخاصة لنظرية الألعاب، وتعزز الفهم التطبيقي للمنهج البياني والبرمجة الخطية في تحليل توازنات الألعاب.

## المراجع

- الشيخ، عبد الله محمد. الرمالي، عمر محمد. عبد الله، جمعة عمر. (2025). تحليل تأثير تعدد القيود على نقطة الحل في نظرية الألعاب: دراسة نظرية للمشاكل من نوع  $(m \times 2)$  أو  $(n \times 2)$ . مجلة جامعة سرت للعلوم الإنسانية، 15(2)، 224-239

- Agrawal, B., Kumar, P. (2022). An Approach of L.P.P method –game problem using simplex method. *International Journal of Research and Analytical Reviews (IJRAR), UGC and ISSN Approved-International Peer Reviewed Journal, Refereed Journal, Indexed Journal, Impact Factor, 9 (4), 1269-2348.*

- Ashour, M. A. H., Al - Dahhan, I. A., & Al - Qabily, S. M. (2020). Solving game theory problems using linear programming and genetic algorithms. In *Human Interaction and Emerging Technologies: Proceedings of the 1st International Conference on Human Interaction and Emerging Technologies (IHET 2019), August 22-24, 2019, Nice, France* (pp. 247-252). Springer International Publishing.

- Constantinos Daskalakis, Aranyak Mehta, and Christos Papadimitriou. A note on approximate nash equilibria. *Theoretical Computer Science*, 410(17):1581-1588, 2009.

- Ilan Adler. The equivalence of linear programs and zero-sum games. *International Journal of Game Theory*, 42(1):165, 2013.

- Ji, Y., Li, M., & Qu, S. (2018). Multi-objective linear programming games and applications in supply chain competition. *Future Generation Computer Systems*, 86, 591-597.

- Justin Dallant, Frederik Haagenzen, Riko Jacob, László Kozma, and Sebastian Wild. Finding the saddle point faster than sorting. In *2024 Symposium on Simplicity in Algorithms (SOSA)*, pages 168-178. SIAM, 2024.

2. آليات الوصول إليها: تشير هذه النقطة إلى الكيفية التي يمكن من خلالها تحديد الحلول المثلى للاعب، أي تحديد مجموعة الاحتمالات التي تمثل التوليفات الاستراتيجية التي تحقق نفس قيمة المباراة. ويمكن الوصول إلى هذه الحلول من خلال الطريقة البيانية، وذلك عن طريق تحليل الشكل البياني وتحديد النقاط الواقعة على القطعة المستقيمة التي تمثل مجموعة الحلول المثلى، حيث تُظهر هذه النقاط كافة التوليفات الممكنة التي تمنح اللاعب أفضل نتيجة ممكنة في إطار اللعبة. أما بالنسبة لتحديد الحل الأمثل الآخر (النقطة الثانية للقطعة المستقيمة)، يتم ذلك، عن طريق إحلال المتغير الإضافي (*Slack*) الذي سعر ظله (*Shadow Price*) يساوي الصفر، بأحد المتغيرات الإضافية الداخلة في الحل (*Basic variables*)، وينتج عن هذا الإحلال الانتقال إلى الحل الأمثل الآخر.

3. أثرها على المنافس الآخر: وجود عدة حلول مثلى لأحد اللاعبين، لا تؤثر على اللاعب الآخر، بمعنى تحرك اللاعب صاحب الحلول المتعددة بين هذه الحلول، لا يؤثر على اللاعب الآخر، لأنه كما ذكرنا في الاستنتاج الأولي، فإن الأخير في هذه الحالة تكون له استراتيجية صرفه سوف يستخدمها في كل الظروف، وسوف تحقق له توازن مع الخصم عند أي حل من الحلول المثلى.

4. إمكانية حدوثها لكلا اللاعبين: لا يمكن حدوث حالة تعدد الحلول المثلى لكلي اللاعبين في ذات الوقت (ذات اللعبة)، ويشترط في هذا وجود استراتيجية صرفه لكلا اللاعبين، وهذا يعني وجود خيار واحد فقط لكل لاعب، والذي يعني إمكانية اختصار مصفوفة الدفع لهذه اللعبة لتصبح مصفوفة من نوع  $(1 \times 1)$ ، وهذا يعني خيار واحد فقط لكل لاعب (حل وحيد لكل لاعب).

## 9. الخلاصة: (Summary)

تناولت هذه الدراسة حالة غير تقليدية في الألعاب الثنائية ذات المجموع الصفري (*Two-Player Zero-Sum Games*)، تتمثل في وجود أكثر من نقطة توازن (*Nash Equilibrium*)، والتي تعني وجود أكثر من حل أمثل لأحد اللاعبين بدلاً من الحل الوحيد الشائع في النظرية الكلاسيكية. وقد تم تحليل هذه الحالة من خلال الجمع بين المنهج البياني وأسلوب البرمجة الخطية، بهدف فهم آلية نشوء تعدد الحلول المثلى وشروط تحققها. أظهرت النتائج أن تعدد الحلول المثلى يرتبط بوجود استراتيجية صرفه مهيمنة لدى أحد اللاعبين، وأن هذه الاستراتيجية تحقق نفس العائد مهما اختلفت استراتيجيات المنافس الآخر، مما يسمح بتعدد التوليفات الاستراتيجية التي تحقق نفس قيمة اللعبة. كما بيّنت الدراسة أن هذا التعدد لا يؤثر على توازن اللعبة أو على اللاعب الآخر، وأن حدوث تعدد الحلول المثلى لكلا اللاعبين في آنٍ واحد غير ممكن ضمن الإطار نفسه.

- Kearns, M., Littman, M. L., & Singh, S. (2013). Graphical models for game theory. *arXiv preprint arXiv:1301.2281*.
- Kumar, S., & Reddy, D. S. N. (1999). Graphical solution of  $(n \times m)$  matrix of a game theory. *European journal of operational research*, 112 (2), 467-471.
- Kumar, S., & Reddy, D. S. N. (1999). Graphical solution of  $(n \times m)$  matrix of a game theory. *European journal of operational research*, 112(2), 467-471.
- Maiti, A., Boczar, R., Jamieson, K., & Ratliff, L. J. (2023). Query-Efficient Algorithm to Find All Nash Equilibria in a Two-Player Zero-Sum Matrix Game. University of Washington.
- Nash, J. F. (1950). Equilibrium points in  $n$ -person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36(1), 48-49.
- Nash, J. F. (1951). Non-cooperative games. *Annals of Mathematics*, 54(2), 286-295.
- Peters, H. (2015). *Game theory: A Multi-levelled approach*. Springer. Texts in Business and Economics, Berlin Heidelberg, (2nd ed.)
- Thie, Paul R., and Gerard E. Keough. *An Introduction to Linear Programming and Game Theory*. John Wiley & Sons, 2016.
- Vang, C. (2022). Implementing the Simplex Algorithm to Solve Zero-Sum Games.
- Von Neumann, J. (1928). Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen*, 100 (1), 295-320
- Von Neumann, J., & Morgenstern, O. (1944/1947) *Theory of games and economic behavior*. Princeton: Princeton University Press
- Yakov Babichenko. Query complexity of approximate nash equilibria. *Journal of the ACM (JACM)*, 63(4):1-24, 2016.
- Zermelo, E. (1913). Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. In *Proceedings of the fifth international congress of mathematicians* (Vol. 2, pp. 501-504). Cambridge: Cambridge University Press.