Sirte University Journal of Humanities: Vol.15. Issue2. December 2025.

Sirte University Journal of Humanities (SUJH) مجلة جامعة سرت للعلوم الإنسانية

Source Homepage: http://journal.su.edu.ly/index.php/Humanities/index

https://doi.org/10.37375/sujh.v15i2.3686

تحليل تأثير تعدد القيود على نقطة الحل في نظرية الألعاب: دراسة نظرية للمشاكل من نوع $(m \times 2)$ أو $(2 \times n)$

د. عبد الله محمد الشيخ
a.elshaikh@eps.misuratau.edu.ly
كلية الاقتصاد والعلوم السياسية، جامعة مصراتة، ليبيا

د. عمر محمد الرمالي
o.elramalli@eps.misuratau.edu.ly
كلية الاقتصاد والعلوم السياسية، جامعة مصراتة، ليبيا

د. جمعة عمر عبدالله
j.abdalla@eps.misuratau.edu.ly
كلية الاقتصاد والعلوم السياسية، جامعة مصراتة، ليبيا

تاريخ الوصول:2025.7.17– تاريخ الموافقة:2025.9.20– تاريخ النشر:2025.12.1

الملخص

تتناول هذه الورقة مشكلة غير اعتيادية في حل مسائل نظرية الألعاب باستخدام الطريقة البيانية، وذلك عندما تكون مصفوفة الدفع من نوع ($m\times2$) أو ($n\times2$) ، والذي يعني أن أحد اللاعبين يمتلك إستراتيجيتين فقط كحد أقصى. تعتمد الطريقة البيانية على تمثيل استراتيجيات اللاعب ذو الإستراتيجيتين كمحورين للرسم البياني، بينما تمثل استراتيجيات اللاعب الثاني كقيود على اللاعب الأول ، حيث يتم تحديد الحل الأمثل للاعب الأول من خلال القيود التي تحدد نقطة الحل، مع استبعاد القيود التي لم تساهم في تحديد هذه النقطة. إن المشكلة التي تعالجها هذه الورقة تكمن في الحالات الخاصة التي تكون فيها نقطة الحل للاعب الأول محددة بأكثر من قيدين، وهو ما يتناقض مع الحالة الاعتيادية التي تكون فيها نقطة الحل ناتجة عن تقاطع قيدين فقط ، وهذه الحالة تعتبر حالة غير اعتيادية (حالة خاصة) ويصبح من الضروري دراسة كيفية التعامل مع هذه القيود الإضافية. تهدف الورقة إلى تحليل هذه الحالة باستخدام البرمجة الخطية، مع التركيز على كيفية تحديد القيود التي يجب استبعادها عند حل مشكلة اللاعب الثاني باستخدام الطريقة البيانية ، كما تسعى إلى دراسة تأثير استبعاد هذه القيود على كلا اللاعبين لضمان الوصول إلى الحل الأمثل الصحيح ، وتساهم هذه الورقة في فهم أعمق لآلية الحل البياني في نظرية الألعاب، خاصة في الحالات غير التقليدية التي تطرح تحديات إضافية في استخدام الطريقة البيانية . وعن طريق هذا التحليل تم معرفة القيود النشطة التي يجب استخدامها في عملية الحل بالطريقة البيانية ، والذي يعني استبعاد القيود غير النشطة واعتبارها قيود فائضة وبالتالي لا يجب استخدامها عند عملية الحل بالطريقة البيانية .

الكلمات المفتاحية:

نظرية الألعاب ، حالة خاصة ، الطريقة البيانية ، البرمجة الخطية .

Analysing the Impact of Multiple Constraints on the Solution Point in Game Theory: A Theoretical Study into Problems of Type (m×2) or (2×n)

Dr. Abdalla Mohamad Elshaikh
Faculty of Economics and Political Sciences - Misurata University - Libya

Dr. Omar Mohamad Elramalli
Faculty of Economics and Political Sciences - Misurata University- Libya

Dr. Juma Omar Abdalla
Faculty of Economics and Political Sciences - Misurata University- Libya

Abstract

This paper addresses an atypical challenge in solving game-theoretic problems via the graphical method when the payoff matrix is of dimensions (m×2) or (2×n), implying that one player is limited to at most two strategies. The graphical method represents the two-strategy player's options as the axes of a plane, while the second player's strategies manifest as linear constraints. The optimal solution for the first player is then determined by the intersection of these constraints, discarding any that do not influence the solution point. The focus of this study is on the special scenarios where the solution point for the first player is defined by more than two constraints, which contrasts with the standard case, in which the solution point arises from the intersection of exactly two constraints. Such instances are non generic and require careful handling due to the presence of additional constraints. The paper aims to analyze this case using linear programming, with a focus on how to identify and exclude constraints when solving the second player's problem via the graphical method, It also seeks to examine the impact of excluding these constraints on both players in order to ensure the attainment of the correct optimal solution. Moreover, it contributes to a deeper understanding of the solution procedure of the graphical method; especially in non-standard cases that pose additional challenges for the use of the graphical method. Through this analysis, the active constraints that must be used in the graphical solution process are identified, which implies excluding inactive constraints and considering them as redundant, thereby not to be utilized in the graphical solution procedure.

Keywords

Game Theory, Special Case, Graphical Method, Linear Programming.

1. المقدمة

إن نظرية الألعاب والتي تسمى أيضاً بنظرية المباريات هي من أبرز الأدوات التحليلية المستخدمة في بحوث العمليات، حيث توفر إطارًا رياضيًا لفهم وتوجيه التفاعلات الإستراتيجية بين الأطراف المتنافسة ، حيث تعتمد النظرية على تحليل مواقف يتم فيها اتخاذ القرارات من قبل عدة أطراف تتداخل مصالحهم وتتعارض بشكل معقد، مما يتطلب دراستها بشكل معمق لفهمها واستغلالها بالشكل الأمثل. بفضل هذا النهج التحليلي المتقدم، أصبحت نظرية الألعاب من أكثر الأدوات استخدامًا لفهم السلوكيات الاقتصادية والسياسية والعسكرية والاجتماعية، فضلاً عن أنها تشكل أساسًا متينًا لاتخاذ القرارات في البيئات التي تتسم بالتنافسية وعدم اليقين. إن نشأت نظرية الألعاب في البداية كمجال رياضي يركز على حل مشكلات تتعلق بالصراعات والمنافسة. ومع مرور الوقت، تطورت لتصبح أداة متعددة الاستخدام يمكن تطبيقها على مجموعة متنوعة من المجالات، بدءًا من الاقتصاد وإدارة الأعمال وصولاً إلى الجانب العسكري والسياسي والتسويق وعلم الاجتماع. حيث تدرس النظرية في جوهرها كيفية اتخاذ الأفراد أو المؤسسات قراراتهم في مواقف يكون لكل طرف فيها أهدافه واستراتيجياته الخاصة، مع العلم بأن قرار أحد الأطراف يتوقف على القرارات التي يتخذها الطرف الآخر.

يعتبر مجال الاقتصاد من أحد المجالات الرئيسية التي استفادت من نظرية الألعاب ، حيث تستخدم النظرية لتحليل المنافسة بين الشركات ودراسة كيفية تأثير استراتيجيات التسعير، الترويج، والتوزيع وتصميم الحملات الترويجية، وذلك على أساس فهم سلوك السوق بشكل أعمق والتنبؤ بكيفية تفاعل المستهلكين والشركات الأخرى على الأداء الاقتصادي، وذلك بهدف تحسين استراتيجياتها لتحقيق أقصى ربح ممكن مع مراعاة ردود فعل المنافسين. وفي مجال السياسة، لنظرية الألعاب دورًا كبيرًا في تحليل التفاعلات بين الدول والمفاوضات الدولية ، حيث يستخدم القادة السياسيون هذه النظرية لفهم كيفية تفاعل الدول مع بعضها البعض في ظل الظروف المعقدة التي تشمل قضايا مثل التجارة الدولية، النزاعات العسكرية، والتحالفات السياسية. والجدير بالذكر أن نظرية الألعاب لا تقتصر على التحليل الاقتصادي والسياسي فقط، بل تمتد لتشمل مجالات أخرى مثل علم الاجتماع، علم النفس، وعلم الحاسوب. فقد تم توظيف نظرية الألعاب في تطوير الخوارزميات وتحسين عملية اتخاذ القرارات الذاتية في الأنظمة المعقدة، مثل الذكاء الاصطناعي. في هذه الورقة العلمية، استعرضنا بعض الحالات الخاصة في نظرية الألعاب التي يكون عدد المتنافسين أو اللاعبين أثنين فقط (Games for Two players)، والتي تكون فيها مصفوفة الدفع (Payoff Matrix) من نوع $(2\times n)$ أو $(m\times 2)$. وتم تحليل بعض مشاكل نظرية الألعاب التي فيها أحدى استراتيجيات أحد اللاعبين متساوية (قيم عناصر الصف أو قيم عناصر العمود متساوية) ، بالإضافة إلى مصفوفة الألعاب (Payoff Matrix) التي تكون فيها نقطة الحل يحددها أكثر من إستراتيجيتين (أكثر من قيدين) ، وتمت عملية التحليل باستخدام البرمجة الخطية ، وتفسير ذلك وفقاً للطريقة البيانية (Graphical Method) المستخدمة في حل نظرية الألعاب، بهدف تحديد الخيارات المثلى المتاحة للاعبين، وتحديد القيود التي تساهم في تحديد الخيارات واحتمالات لعب كل إستراتيجية لكلا اللاعبين.

2. نظرية الألعاب (Game theory)

نظرية الألعاب هي حقل من حقول الرياضيات التطبيقية التي تركز على دراسة المواقف التي تنطوي على تفاعل استراتيجي بين أطراف مختلفة، حيث تؤثر قرارات كل طرف على نتائج الآخرين. يتم تطبيق نظرية الألعاب في مجموعة واسعة من المجالات مثل الاقتصاد، العلوم السياسية، علم النفس، البيولوجي، وحتى في الذكاء الاصطناعي، وتهدف إلى تحليل سلوك الأطراف المتنافسة أو المتعاونة، وتحديد الخيارات أو الاستراتيجيات التي من شأنها أن تمنح كل طرف أفضل نتيجة ممكنة، سواء كانت المنافسة على الموارد أو اتخاذ قرارات تعاونية لتحقيق أهداف مشتركة.

هناك عدة طرق تستخدم لحل مسائل نظرية الألعاب التي تعتمد على نوع اللعبة وعدد اللاعبين المشاركين في اللعبة، ومن بين أهم هذه الطرق، طريقة توازن ناش (Nash Equilibrium) ، طريقة التراجع العكسي (Backward Induction) ، الطريقة البيانية (Graphical Method)، البرمجة الخطية (Linear Programming). وفي هذه الورقة سيتم تحليل بعض الحالات في نظرية الألعاب، عليه سنقوم أولاً بعرض موجز لطريقة البرمجة الخطية والتي توضح النموذج الرياضي لهذه النظرية، ومن تم عرض الطريقة البيانية التي تفسر عملية تحليل هذه الحالات الخاصة وذلك كما يلي:

أ) طريقة البرمجة الخطية (Linear Programming)

تُستخدم البرمجة الخطية في حل مسائل نظرية الألعاب عندما تكون هناك استراتيجيات مختلطة (لا يوجد استراتيجيات صرفة للاعبين) ،

ويكون الهدف هو إيجاد احتمالات خليط من الاستراتيجيات التي تعطي أفضل نتائج ممكنة. إن هذه الطريقة مفيدة بشكل خاص في الألعاب ذات المجموع الصفري، حيث يكون مكسب لاعب معين هو بالضرورة خسارة للاعب الآخر، و تتم صياغة مشكلة كل لاعب على شكل نموذج للبرمجة الخطية ، وتكون مشكلة اللاعب الأول (A) تهدف للتقليل ومحددة بقيود اللاعب الثاني (B) ، ويكون النموذج للاعب الثاني (B) ويهدف للتعظيم ومقيد بقيود اللاعب الأول (A)،و يتم تعريف دالة الهدف بتعظيم أو تقليل قيمة معينة، بناءً على نوع اللاعب، فعلى على سبيل المثال، بالنسبة للاعب الأول، يتم تعظيم الحد الأدنى للعوائد التي سيحصل عليها ،و أما اللاعب الثاني فيتم تقليل الحد الأقصى للخسائر التي قد يتكبدها، بمعنى في الألعاب ذات المجموع الصفري (أرباح اللاعب الأول تساوي خسائر اللاعب الثاني) يكون الهدف هو تعظيم أقل المكاسب الممكنة للاعب الأول وتقليل أكبر الخسائر المحتملة للاعب الثاني. وبعد صياغة داله الهدف والقيود (النموذج الخطي للمشكلة) كما سبق الذكر يمكن حل هذا النموذج باستخدام طرق البرمجة الخطية مثل خوارزمية السمبلكس (Simplex Algorithm)، والتي اعتمدنا عليها في عملنا في هذه الورقة، والتي أظهرت احتمالات استخدام الاستراتيجيات المختلطة لكل لاعب من خلال القيم التي تحققها داله الهدف، وتبين احتمالات اختيار كل إستراتيجية لكلا اللاعبين. ويمكن توضيح النموذج الرياضي لهذه النظرية، (الجواد وآخرون، 2008) كالتالي:

نفرض أن مصفوفة الدفع التالية لعدد اثنان من اللاعبين (A , B) ، حيث:

يمتلك اللاعب الأول (A) عدد (m) من الاستراتيجيات (x_1 , x_2 , x_3, …, x_m) .

يمتلك اللاعب الثاني (B) عدد (n) من الاستراتيجيات (y_1 , y_2 , y_3, …, y_n) .

جدول رقم (1) مصفوفة الدفع للاعبين (A , B) من نوع (n×m)

B

A

n / m	y_1	y_2	y_3	…	y_n
x_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	…	a_{1n}
x_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	…	a_{2n}
x_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	…	a_{3n}
⋮	⋮	⋮	⋮	…	⋮
x_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	…	a_{mn}

ومن هذه المصفوفة يمكن صياغة النماذج الرياضية لكلا اللاعبين (A , B) كما يلي:

أولاً– النموذج الأول (نموذج اللاعب A):

$$Min\ (z) = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots . + x_m \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$ST:$$

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + \cdots . + a_{m1}x_m \geq 1 \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + \cdots . + a_{m2}x_m \geq 1 \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots . + a_{m3}x_m \geq 1 \ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + a_{3n}x_3 + \cdots . + a_{mn}x_m \geq 1 \ldots\ldots\ldots (5)$$

$$x_1 , x_2 , \ x_3 , \ldots x_m \geq 0$$

حيث أن:

x_1: هي قيمة احتمال أن يلعب اللاعبِ (A) الإستراتيجية الأولى

x_2: هي قيمة احتمال أن يلعب اللاعبِ (A) الإستراتيجية الثانية

… … … … … … … … … … …

x_m: هي قيمة احتمال أن يلعب اللاعبِ (A) الإستراتيجية (m)

ثانياً– النموذج الثاني (نموذج اللاعب B):

$$Max(w) = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots . + y_n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

ST:

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + \cdots. + a_{1n}y_n \le 1 \ldots\ldots\ldots (7)$$

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + \cdots. + a_{2n}y_n \le 1 \ldots\ldots\ldots (8)$$

$$a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 + \cdots. + a_{3n}y_n \le 1 \ldots\ldots\ldots (9)$$

$$\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + a_{m3}y_3 + \cdots. + a_{mn}y_n \le 1 \ldots\ldots (10)$$

$$y_1 , y_2 , \; y_3 , \ldots y_n \ge 0$$

حيث أن:

y_1: هي قيمة احتمال أن يلعب اللاعب (B) الإستراتيجية الأولى

y_2: هي قيمة احتمال أن يلعب اللاعب (B) الإستراتيجية الثانية

... ...

y_n: هي قيمة احتمال أن يلعب اللاعب (B) الإستراتيجية (n)

والجدير بالذكر هنا إن البرمجة الخطية تتعامل مع الألعاب المعقدة ، فهي قادرة على التعامل مع الألعاب الكبيرة التي تتضمن العديد من الاستراتيجيات لكلا اللاعبين والتي يصبح فيها التحليل اليدوي معقدًا ، وهي تعطي نتائج دقيقة وتوفر حلولاً دقيقة مبنية على منهج رياضي واضح ، إلا إن هذا يتطلب أدوات متخصصة (مثل البرامج الحاسوبية) ، لذلك في هذه الورقة اعتمدنا على أداة (Solver) في تطبيق الإكسل (Excel) في حل الحالة الخاصة بموضوع الورقة.

ب) **الطريقة البيانية** (Graphical Method)

الطريقة البيانية تُستخدم لحل مسائل نظرية الألعاب الثنائية (تلك المباريات التي تشمل لاعبين اثنين فقط) حيث يتم تمثيل استراتيجياتهم على محاور الرسم وتحليل النتائج المحتملة بسهولة ، وتظهر النتائج بشكل واضح على الرسم البياني ، وتكون هذه الطريقة فعّالة بشكل خاص في الألعاب ذات المصفوفات الصغيرة التي تحتوي على عدد اثنين من الصفوف ومهما كان عدد أعمدتها ($2\times n$) أو المصفوفة التي يكون عدد أعمدتها أثنين ومهما كان عدد صفوفها ($m\times 2$) . حيث يتم أولاً حل المصفوفة بالنسبة للاعب الذي عدد استراتيجياته اثنين ، ومن هذا الحل يتم تحديد الاستراتيجيات النشطة للاعب الآخر ومن تم حلها . ويمكن تلخيص خطوات استخدام الطريقة البيانية في حل مسائل نظرية الألعاب، (Kumar, S .et al ,1999) كما يلي:

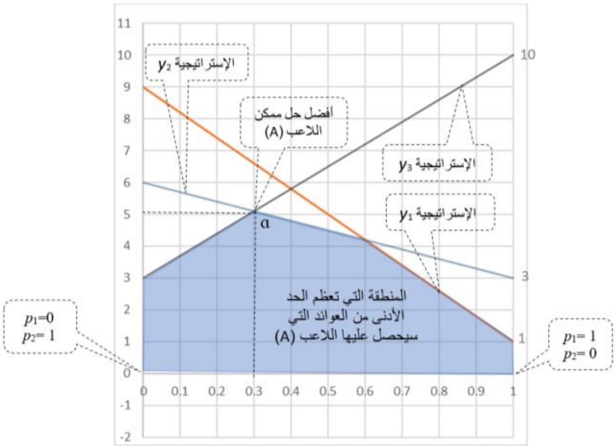
1. يتم أولاً حل المشكلة للاعب الذي يمتلك إستراتيجيتين ، حيث يتم تمثيل احتمال لعب الإستراتيجية الأولى (x_1) باحتمال (p_1) على المحور الأول ، ويتم تمثيل احتمال لعب الإستراتيجية الثانية (x_2) باحتمال (p_2) على المحور الثاني . على أن تكون المسافة بين المحورين هي الواحد الصحيح ، والذي يعبر عن مجموع احتمالات هاتين الإستراتيجيتين ($p_1 + p_2 = 1$).حيث يتم رسم الخطوط البيانية، والتي تمثل استراتيجيات اللاعب الثاني وتعتبر قيود على اللاعب الأول ، ويتم التركيز على تقاطع هذه الخطوط وعلى المنطقة التي تحقق أفضل النتائج لهذا اللاعب (الأول).
2. يتم تحديد نقطة الحل لهذا اللاعب (اللاعب الذي يمتلك إستراتيجيتين فقط) بيانياً ، فإذا كان هذا اللاعب هو لاعب الأرباح فتكون نقطة الحل هي النقطة التي تعظم الحد الأدنى من العوائد التي سيحصل عليها، أما إذا كان اللاعب هو لاعب الخسائر فتكون نقطة الحل (بيانياً) هي النقطة التي تقلل الحد الأقصى للخسائر التي قد يتكبدها.
3. يتم تحديد استراتيجيات اللاعب الثاني (الذي يمتلك أكثر من إستراتيجيتين) ، وهي الاستراتيجيات التي حققت نقطة الحل للاعب الأول ، وبهذا يتم حذف الاستراتيجيات التي لم تساهم في حل اللعبة للاعب الأول.
4. بعد استبعاد الاستراتيجيات التي لم تساهم في تحديد نقطة الحل للاعب الأول، يتم استخدام الاستراتيجيات التي ساهمت في حل المصفوفة بالنسبة للاعب الثاني، حيث تقلصت استراتيجيات اللاعب الثاني وأصبح من اليسير حلها بيانياً أو عن طرق أسلوب الاحتمالات المشتركة. ويمكن توضيح ذلك كما في المثال التالي:

جدول رقم (2) مصفوفة الدفع للاعبين (A , B)

	B		
A	y_1	y_2	y_3
x_1	1	3	10
x_2	9	6	3

أولاً– رسم المصفوفة بالنسبة للاعب (A)

هنا يتم رسم المصفوفة بالنسبة للاعب (A) لأنه يحتوي على عدد 2 من الاستراتيجيات فقط (x_1 , x_2) ، ولا يمكن رسمها بيانيا بالنسبة للاعب (B) فهو يحتوي على عدد 3 استراتيجيات (y_1 , y_2 , y_3) ، ويكون شكل الرسم البياني للاعب (A) على افتراض أنه لاعب الأرباح وذلك كما يلي:



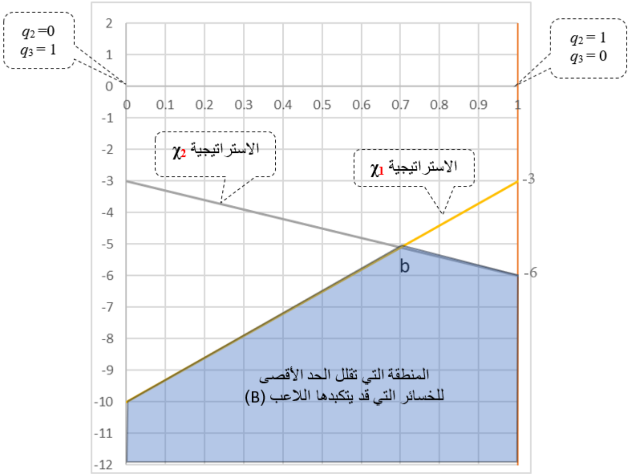
الشكل رقم (1) حل مصفوفة ألعاب من نوع (2×3) بالنسبة للاعب الأرباح (A)، (إعداد البحاث).

نلاحظ من الرسم البياني إن أفضل حل للاعب (A) وهو تعظيم الحد الأدنى من العوائد عند النقطة (a)، وهو أفضل حل في المنطقة التي تحقق أفضل النتائج لهذا اللاعب، ومن هذه النقطة يتم إسقاط خط عمودي لتحديد احتمالات كل إستراتيجية (x_1,x_2) ، حيث يتبين إن احتمال لعب الإستراتيجية (x_1) هو (p_1) والذي يساوي (0.3) ، واحتمال لعب الإستراتيجية (x_2) هو (p_2) والذي يساوي (0.7) ، ويتم مد خط أفقي من ذات النقطة (a) لمعرفة قيمة المباراة والتي تساوي (V = 5).

ويلاحظ أن الإستراتيجيتين (y_2 , y_3) التي تخص اللاعب (B) هي التي حددت نقطة الحل (a) التي تخص اللاعب (A) ، لذلك سيتم استبعاد الإستراتيجية الأخرى (y_1) ، ويتم حل المصفوفة بالنسبة للاعب (B) على هذا الأساس .

ثانياً– رسم المصفوفة بالنسبة للاعب (B)

هنا يتم رسم المصفوفة بالنسبة للاعب (B) على أساس أن لديه إستراتيجيتين فقط هما (y_2 , y_3) ، ويكون شكل الرسم البياني للاعب (B) على افتراض أنه لاعب الخسائر وذلك كما يلي:



الشكل رقم (2) حل مصفوفة ألعاب من نوع (2×3) بالنسبة للاعب الخسائر (B) ، (إعداد البحاث).

إن اللاعب (B) وهو لاعب الخسائر يهدف إلى تقليل الحد الأقصى منها ، ويلاحظ من الرسم البياني إن أفضل حل لهذا اللاعب (B) يتحدد عند النقطة (b)، وهو أفضل حل في المنطقة التي تحقق أفضل النتائج له ، ويمكن من هذه النقطة إسقاط عمود باتجاه المحور الأفقي لتحديد احتمالات كل إستراتيجيته $(y_2 . y_3)$ ، حيث يتبين إن احتمال لعب الإستراتيجية (y_2) هو (q_2) والذي يساوي (0.7) ،واحتمال لعب الإستراتيجية (y_3) هو (q_3) و يساوي (0.3) ، ويتم مد خط أفقي من ذات النقطة (b) لمعرفة قيمة المباراة والتي تساوي (V = −5). وبهذا نكون قد توصلنا لحل المشكلة لكلا اللاعبين ابتداء من اللاعب الذي يملك إستراتيجيتين فقط .

إن الطريقة البيانية تعتبر فعالة لأنها توفر عرضًا بصريًا للمسألة، مما يسهل تحليل الألعاب ذات القرارات المحدودة, ولكنها تصبح أقل فعالية في الألعاب الكبيرة التي تتطلب استراتيجيات متعددة، حيث يصبح الرسم البياني أكثر تعقيدًا وصعوبة في التفسير.

3. **الدراسات السابقة** (Literature Review):

تمثل نظرية الألعاب فرعًا رياضيًا واقتصاديًا يدرس التفاعلات الإستراتيجية بين الأفراد العقلانيين ، حيث ذكر (Peters, H, 2015) في كتابه Game Theory: A Multi-Leveled Approach) إن نظرية الألعاب تدرس حالات التنافس والتعاون بين عدة أطراف معنية باستخدام أساليب رياضية ، وإنها تخصص رياضي رسمي حسب تصنيف الجمعية الرياضية الأمريكية (الرمز A91)، إلا أن علماء الاقتصاد هم من يطورونها ويطبقونها في الغالب. ويُعدّ (Zermelo,E,1913) من أوائل الأعمال الرسمية في نظرية الألعاب، الذي أثبت منطقيات لعبة الشطرنج تُعد حالة حَتمية ، بمعنى أن أحد الأمور الثلاثة التالية يجب أن تتحقق، وهو أن يمتلك اللاعب الأبيض إستراتيجية رابحة تضمن له الفوز دائماً ، أو يكون للأسود إستراتيجية رابحة أيضاً تمكنه من الفوز دائماً ، أو يمتلك كلا اللاعبَين إستراتيجية تضمن لهما على الأقل التعادل في كل مرة.

قدم (Von Neumann،1928) عملاً مميزا في نظرية الألعاب الإستراتيجية(On the Theory of Strategic Games) والذي يُعد حجر الأساس لنظرية الألعاب غير التعاونية (non cooperative game)، وذلك بالإجابة على السؤال التالي، وهو كيف يجب على أحد المشاركين أن يلعب من أجل تحقيق أفضل نتيجة؟ وقد شكّل هذا العمل أساسًا لكتاب Von Neumann et al (1947,) بعنوان (Theory of Games and Economic Behavior 1947/1944)، الذي اعتبره الكثيرون نقطة انطلاق نظرية الألعاب، لأنه في هذا الكتاب، وسّع المؤلفان نطاق عمل von Neumann في ألعاب المجموع الصفري (أرباح الأول تعادل خسائر الأخر)، ووضعا الأساس لدراسة الألعاب التعاونية (الائتلافية) ، ويكشف عنوان هذا الكتاب عن نية المؤلفان في تطبيق نظرية الألعاب على الاقتصاد، ومع ذلك ظل تطوير نظرية الألعاب حكرًا بشكل رئيسي على علماء الرياضيات حتى خمسينيات وستينيات القرن الماضي.وذكر Peters في كتابه المذكور أعلاه أنه في أواخر ستينيات وسبعينيات القرن الماضي، أصبحت نظرية الألعاب مقبولة كلغة رسمية جديدة في علم الاقتصاد تحديدًا.

تُعدّ المنهجية الجديدة التي قدمها (Kumar, S. et al 1999) لحل مصفوفة الألعاب ($m \times n$) بالطريقة البيانية قريبة من هذا البحث من حيث المنهجية التي تناولت تحليل تأثير تعدد القيود على نقطة الحل ، ولهذا سوف نعرض محتواها بشيء من التفصيل. حيث ذكرا (Kumar, et 1999) بأنه في معظم كتب بحوث العمليات نجد أن الطريقة البيانية تقتصر على حل مصفوفات الألعاب من نوع ($m \times 2$) أو ($2 \times n$) فقط ، إلا أنه في ورقته هذه تم تسلط الضوء على إمكانية تطبيق الطريقة البيانية على أي مصفوفة من نوع($n \times m$). تتضمن الطريقة الجديدة خطوات بسيطة وسهلة الفهم ، في حين أنه عند تطبيق طريقة الهيمنة، نجد في بعض الحالات أن صفًا أو عمودًا معينًا لا يُهيمن على صف أو عمود آخر، وفي هذه الحالة، نحسب متوسط صفين أو عمودين، ثم نتحقق من الهيمنة. هذا يستغرق وقتًا طويلاً ، أما إذا اتبعنا الطريقة البيانية الجديدة ، فسيستغرق وقتًا أقل بكثير.

إن الفكرة الكامنة وراء المنهجية التي قدمها Kumar, S .et al (1999,) في حل مصفوفة من نوع ($m \times n$) لعدد 2 من اللاعبين (A , B) هو اختيار عدد 2 من الاستراتيجيات لأي من اللاعبين (A , B) وتمثيل المصفوفة بيانيا لهذا اللاعب باستراتيجيات اللاعب الأخر ، فإذا تم اختيار اللاعب (A) يتم تمثيل المصفوفة بيانيا لهذا اللاعب باستخدام كافة استراتيجيات اللاعب الأخر (B) وهي ($y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$) ، ومن هذا الرسم البياني يتم تحديد الإستراتيجيتين اللاتي تحقق أقصى الأدنى (*MaxMin Value*)، ومن تم يتم استخدام هاتين الإستراتيجيتن لحل المصفوفة بالنسبة للاعب (B) مع كافة استراتيجيات اللاعب (A), وهي ($x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$) ، وبهذا تصبح مصفوفة من النوع ($m \times 2$) ، والتي يمكن حلها بيانياً . أما إذا تم اختيار اللاعب (B) يتم تمثيل المصفوفة بيانيا لهذا اللاعب باستخدام كافة استراتيجيات اللاعب الأخر (A) ، ومن هذا الرسم البياني يتم تحديد الإستراتيجيتين اللاتي تحقق نقطةأدنى الأقصى (*MinMax Value*)، ومن تم يتم استخدام هاتين الإستراتيجيتين لحل المصفوفة بالنسبة للاعب (A) مع كافة استراتيجيات اللاعب (B) ، وبهذا تصبح مصفوفة من النوع ($2 \times n$) . في حين تدرس هذه الورقة الحالة الخاصة التي تتحقق فيها نقطة الحل (*MinMax Value*) بأكثر من إستراتيجيتين.

قدم (Kearns, M. et al.2001) نماذج بيانية لنظرية الألعاب متعددة اللاعبين، وعلى أساسها تم تقديّم خوارزميات فعّالة لحساب توازنات (Nash) في حالات مُحدّدة، وذلك عندما يكون الرسم البياني

الأساسي شجرةً أو مُمثّلة بأشجار أو رسوم بيانية مُتفرقة مع دمج عددا قليلا من العقد, حيث تُعطى لعبة تضمّ (n)لاعبًا من خلال رسم بياني غير مُوجّه على (n) عقدة ومجموعة من (n) مصفوفات فرعية . التفسير هو أن العائد للاعب (i) يتحدّد كليًا من خلال تصرفاته وجيرانه (Neighborhood) في الرسم البياني، وبالتالي فإنّ مصفوفة العائد للاعب (i)تجدول فقط من قِبل هؤلاء اللاعبين.

هدفت دراسة (Ji, Y. et al. 2018) إلي استكشاف وتحليل نماذج الألعاب متعددة اللاعبين والأهداف الخطية، بناء على النظرية الثنائية المشروطة Karush –Kuhn –Tucker (KKT) ، وتم اقتراح نهجين لحل النموذج، بالنسبة للنهج الأول وهو قائم على الثنائية التي تحقق كفاءة باريتو (Pareto Efficient) للمشكلة الأولية، وهو الحد الذي لا يمكن بعده تحسين وضع أحد اللاعبين دون الإضرار بالأخر، أما بالنسبة للنهج الثاني القائم على KKT ، فقد أثبتوا أنه يمكن تحقيق توازن (Pareto)من خلال حل مشكلة التكامل الخطي، وقد تم تطبيق هذين النهجين على مشكلة المنافسة في سلسلة التوريد. قدّم(Ashour, M ,et al. 2019) دراسة مقارنة هدفت إلى تحديد الإستراتيجية المثلى لكل من اللاعب (A) واللاعب (B)، وذلك من خلال توظيف كل من أسلوب البرمجة الخطية (Linear Programming – LP)والخوارزمية الجينية (Genetic Algorithm – GA) وقد اشتملت الدراسة على تطبيق تقنيات(LP) لإيجاد الحلول المثلى، ومقارنتها بالحلول الناتجة عن تطبيق (GA)، أظهرت النتائج النهائية تقارباً في كفاءة الطريقتين، مما يشير إلى تكافؤ أدائهما في حل مسائل نظرية الألعاب .

قدم (Vang. 2022) دراسة تبين كيفية تنفيذ (Simplex Method) في حل عدد أكبر من الألعاب ذات الحصيلة الصفرية، التي تستخدم على نطاق واسع في مجالات الرياضيات والاقتصاد في تحليل المواقف وتحديد مسارات العمل المثلى , وأوضح بأنه يمكن اللجوء إلى هذه الخوارزمية لحل مسائل الألعاب الكبيرة بكفاءة. وفي ذات السياق قدم (Kumar,P,et al 2022)) دراسة تهدف إلى استخدام نهج (Linear Programming –LPP Problem لإيجاد الحل الأمثل لحل مسائل الألعاب عندما تنشئ إستراتيجية مختلطة باستخدام طريقة التبسيط التي تستند إلى طريقة تكرار الإجراء المتدرج ، حيث تعطي هذه التقنية الحسابية كفاءة ودقة أكثر مقارنة بطريقة السمبلكس (Simplex) التقليدية.

4. أهداف الدراسة

تدرس هذه الورقة الحالات الخاصة التي يمكن أن تواجه عملية حل مسائل نظرية الألعاب وفقاً للطريقة البيانية ، وذلك عن طريق حل هذه الحالات باستخدام النموذج الرياضي للبرمجة الخطية ، وتحليل هذه الحالات الخاصة باستخدام الطريقة البيانية . إن الهدف من دراسة وتحليل هذه الحالات الخاصة هو معرفة تأثيرها على نتائج المباراة (V) لكلا اللاعبين ، وكذلك معرفة تأثير هذا النوع من المسائل على احتمالات لعب الاستراتيجيات لكلا اللاعبين . ومن جهة أخرى ، ونظراً لتعدد القيود (أكثر من قيدين) التي تحدد نقطة الحل أو نقاط الحل للاعب الأول (الذي يمتلك إستراتيجيتين فقط) ، تهدف أيضاً هذه الورقة لوضع معيار يمكن من خلاله استبعاد بعض القيود وتحديد القيدين اللذين يمكن استخدامهما بالنسبة للاعب الثاني (الذي يمتلك أكثر من إستراتيجيتين) ، ومعرفة أيضاً تأثير القيود المستبعدة على نتائج المباراة لكلا اللاعبين .

5. أهمية الدراسة:

في ظل الندرة النسبية للمراجع العربية لطريقة حل مسائل نظرية الألعاب وفقاً للطريقة البيانية ، فإن أهمية هذه الدراسة تكمن في توفر معلومات قيمة عن هذه النظرية وآلية عمل الطريقة البيانية ، وربط آلية عمل الطريقة البيانية بالنموذج الرياضي للبرمجة الخطية ،هذا من جانب, ومن جانب آخر تتميز هذه الورقة بدراسة هذه الحالات الخاصة لمسائل نظرية الألعاب ومعرفة تأثير نقاط الحل المتعددة على قيمة المباراة واحتمالات لعب الاستراتيجيات لكلا اللاعبين ، وتُعد منهجاً لتحديد الاستراتيجيات النشطة في المباراة، وتأثير استبعاد بعض الاستراتيجيات على نتائج المباراة لكلا اللاعبين ، وهذا يمكن من فهم أعمق لآلية عمل هذه الطريقة (الطريقة البيانية) ، وبهذا توفر تحليلات ومعلومات قيمة على هذه النظرية في ظل ربط الجانب البياني بالجانب الرياضي .

6. مشكلة الدراسة

إن استخدام الطريقة البيانية في حل مسائل نظرية الألعاب التي تكون فيها مصفوفة الدفع (Payoff Matrix) من نوع (m×2) أو (2×n) ، بمعنى إن عدد صفوف المصفوفة أو عدد أعمدتها لا يزيد عن

أثنين ، أي أن أحد اللاعبين لا تزيد عدد استراتيجياته عن اثنين ، ويتم البدء في حل المصفوفة للاعب الذي يملك إستراتيجيتين بيانياً عن طريق تمثيل استراتيجياته على شكل محورين للرسم البياني ، ويتم تمثيل استراتيجيات اللاعب الأخر (الذي يمتلك أكثر من إستراتيجيتين) كخطوط مستقيمة تمثل قيود على اللاعب الأول. ومن خلال الرسم البياني يتم تحديد القيدين اللذان يحققان أفضل حل ممكن للاعب الأول ، أي استبعاد كل القيود التي لم تشارك في تحديد نقطة الحل (استبعاد كل استراتيجيات اللاعب الثاني التي لم تساهم في تحديد نقطة الحل) ، ومن تم يتم حل مشكلة اللاعب الثاني باستخدام الاستراتيجيات التي ساهمت في تحديد الحل للاعب الأول، (النعيمي وآخرون، 2011).

وتكمن مشكلة البحث في الحالات التي يكون فيها عدد القيود التي ساهمت في حل (نقطة الحل) مشكلة اللاعب أكثر من قيدين، لأنها في كثير من الحالات الاعتيادية عند استخدام الطريقة البانية في حل مسائل نظرية الألعاب ، تكون منطقة الحل للاعب الأول (يمتلك إستراتيجيتين) محددة بقيدين أو أكثر ، وتكون نقطة الحل محددة بقيدين فقط (قيدين فقط يشتركان في نقطة الحل) ، إلا أنه في بعض الأحيان (بعض الحالات الخاصة) تكون نقطة الحل لهذا اللاعب محدده بأكثر من قيدين (نقطة الحل ناتجة عن تقاطع أكثر من قيدين في ذات النقطة) .

وهنا سيتم دراسة هذه الحالة غير الاعتيادية (الحالة الخاصة) وتحليلها باستخدام طريقة البرمجة الخطية وتتبع الحل وفقاً للطريقة البيانية، بهدف تحديد أي من القيود التي يجب استخدامها في حل المسألة بالنسبة للاعب الثاني، بمعنى أخر تحديد القيد أو القيود التي يجب استبعادها عند القيام بعملية الحل للاعب الثاني ، وما تأثير استبعاد هذه القيود بالنسبة لكلا اللاعبين.

7. الجانب العملي للورقة (تحليل الحالة الخاصة):

كما سبق الذكر في مشكلة البحث ، فإن هذه الورقة تدرس حالة خاصة في نظرية الألعاب التي يمكن أن تواجه الأكاديميين والمهتمين بحل مسائل نظرية الألعاب باستخدام الطريقة البيانية ، وهي الحالة التي يكون فيها عدد القيود التي تساهم في تحديد نقطة الحل وفقاً للطريقة البيانية أكثر من قيدين ، ففي الحالة الاعتيادية تكون عدد القيود التي تساهم في تحديد نقطة الحل للاعب الأول (اللاعب الذي يمتلك إستراتيجيتين) قيدين فقط من استراتيجيات اللاعب الثاني (اللاعب الذي يمتلك أكثر من إستراتيجيتين) .حتى نتمكن من دراسة وتحليل هذه الحالة نفرض مثال تطبيقي ، تم نقوم بحله باستخدام طريقة البرمجة الخطية (LP) لكلا اللاعبين ، ومن ثم نقوم بحل ذات المثال لكلا اللاعبين باستخدام الطريقة البيانية ، وعلى هذا الأساس نبدأ في تحليل هذه الحالة بهدف الوقوف لتحديد خصوصية هذه الحالة ، وتحديد آلية حلها وفقاً للطريقة البيانية ، والمثال التالي يوضح هذه الحالة التي تمثله مصفوفة الدفع التالية (2×3)، فهي تعكس مسألة صفرية في نظرية الألعاب بين لاعبين (A , B) ، على افتراض أن اللاعب (A) هو لاعب الأرباح واللاعب (B) هو لاعب الخسائر ، أي ما يربحه اللاعب (A) في هذه المصفوفة يمثل خسارة للاعب (B):

جدول رقم (3) مصفوفة الدفع للاعبين (A , B)

A \ B	y_1	y_2	y_3
x_1	4	6	10
x_2	14	11	5

أولاً– حل المسألة باستخدام البرمجة الخطية (LP):

بناءً على مصفوفة الدفع لهذه المسألة التي تمثل هذه الحالة فإنه يمكن صياغتها على شكل نموذج للبرمجة الخطية لكلا اللاعبين، (النعيمي وآخرون، 2011) كما يلي:

1) حل المسألة بالنسبة للاعب (A):

يكون النموذج الرياضي الذي يجسد مشكلة اللاعب (A) والذي يهدف إلى تعظيم الحد الأدنى من العوائد التي سيحصل عليها ، وتكون استراتيجيات اللاعب الثاني (y_1 , y_2 , y_3) هي القيود التي تحد من خياراته ، وبذلك يكون النموذج الرياضي للاعب (A) عبارة عن نموذج للبرمجة الخطية بعدد اثنان متغيرات (x_1 , x_2) وثلاثة قيود وهي استراتيجيات اللاعب (B) وهي(y_1 ,y_2 , y_3)، وبذلك يكون النموذج الرياضي لهذا اللاعب (A) كما يلي:

$$Min\ (z) = x_1 + x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots.\ldots.(11)$$

ST:

$$4x_1 + 14x_2 \geq 1 \ldots\ldots\ldots.(12)$$
$$6x_1 + 11x_2 \geq 1 \ldots\ldots\ldots.(13)$$
$$10x_1 + 5x_2 \geq 1 \ldots..\ldots..(14)$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

حيث أن:

x_1: هي قيمة احتمال أن يلعب اللاعب (A) الإستراتيجية الأولى (p_1).

x_2: هي قيمة احتمال أن يلعب اللاعب (A) الإستراتيجية الثانية (p_2).

- **حل نموذج اللاعب (A)باستخدام أداة (Solve) في تطبيق (Excel)**

عند حل هذا النموذج باستخدام أداة (Solve) في تطبيق (Excel) تظهر النتائج كما يلي:

احتمال لعب الإستراتيجية الأولى (x_1) للاعب الأول (A) $p_1 = 0.6$:

احتمال لعب الإستراتيجية الثانية (x_2) للاعب الأول (A) $p_2 = 0.4$:

قيمة المباراة للاعب الأول (A) :$V = 8$

مع العلم بأن عدد الدورات (Iterations) التي استغرقتها أداة (Solver) عن طريق (Simplex Method) هي ثلاث دورات ، والزمن المستغرق في الحل (Solution Time Seconds) هو 0.031 ثانية.

2) **حل المسألة بالنسبة للاعب (B):**

يكون النموذج الرياضي الذي يجسد مشكلة اللاعب (B) والذي يهدف إلى تقليل الحد الأقصى للخسائر التي قد يتكبدها اللاعب ، وتكون إستراتيجيتي اللاعب الأول (x_1 . x_2)هي القيود التي تحد من خيارات اللاعب (B) ، وبذلك يكون النموذج الرياضي لهذا للاعب (B) عبارة عن نموذج رياضي خطي بعدد ثلاثة متغيرات وهي(y_1 , y_2 , y_3) وعدد اثنان من القيود وهي استراتيجيات اللاعب الأول (A) وهي (x_1, x_2) ، وبذلك يكون النموذج الرياضي لهذا اللاعب (B) كما يلي:

$$Max(z) = y_1 + y_2 + y_3 \ldots\ldots.\ldots\ldots\ldots.(15)$$

$$ST:$$
$$4y_1 + 6y_2 + 10y_3 \leq 1 \ldots\ldots..\ldots.(16)$$
$$14y_1 + 11y_2 + 5y_3 \leq 1 \ldots\ldots..\ldots.(17)$$
$$y_1 , y_2 , y_3 \geq 0$$

حيث أن:

y_1 : هي قيمة احتمال أن يلعب اللاعب (B) الإستراتيجية لأولى (q_1).

y_2 : هي قيمة احتمال أن يلعب اللاعب (B) الاستراتيجي الثانية (q_2).

y_3 : هي قيمة احتمال أن يلعب اللاعب (B) الإستراتيجية الثالثة (q_3).

- **حل نموذج اللاعب (B)باستخدام أداة (Solve) في تطبيق (Excel)**

عند حل هذا النموذج باستخدام أداة (Solve) في تطبيق (Excel) تظهر النتائج كما يلي:

احتمال لعب الإستراتيجية الأولى (y_1) للاعب الثاني (B) $q_1 = 0.33$:

احتمال لعب الإستراتيجية الثانية (y_2) للاعب الثاني (B) $q_2 = 0$:

احتمال لعب الإستراتيجية الثالثة (y_3) للاعب الثاني (B) $q_3 = 0.67$:

قيمة المباراة للاعب الثاني (B) : $V = 8$

مع العلم بأن عدد الدورات (Iterations) التي استغرقتها أداة (Solver) عن طريق (Simplex Method) هي دورتان فقط،

والزمن المستغرق في الحل (Solution Time Seconds) هو 0.015 ثانية.

يتبين مما سبق عند الحل باستخدام البرمجة الخطية في حل نظرية الألعاب ، أن قيم الحل للمتغيرات يعتمد على عدد القيود المستخدمة في النموذج الرياضي ، فعلى سبيل المثال كانت مصفوفة الدفع من نوع (2×3) ، والتي تعني إن عدد متغيرات اللاعب الثاني ثلاث متغيرات (q_1 , q_2 , q_3) وعدد القيود في هذا النموذج اثنان فقط ، فإنه كحد أقصى سيكون هناك قيمتين فقط لمتغيرات الحل ، وهذا يعني أن أحد متغيرات المشكلة (q_1 , q_2 , q_3) ستكون قيمته صفر ، وفعلاً في هذا المثال ظهرت قيمة (q_2) تساوي الصفر. وذلك لأنه وفق طريقة السمبلكس (LP) يتم إدخال المتغير في قيد معين بناءً على مدى تأثيره في دالة الهدف ، وهنا يتبين أن قيم المتغيران (q_1 , q_3) لهما تأثير على دالة الهدف أكبر من تأثير (q_2) .

ثانياً– حل المسألة باستخدام الطريقة البيانية:

نلاحظ إن اللاعب (A) لديه إستراتيجيتين فقط (x_1 , x_2) ، في حين أن اللاعب (B) يمتلك ثلاث استراتيجيات (y_1 , y_2 , y_3)، لذلك سنبدأ بحل المسألة بالنسبة للاعب (A) أولاً، ثم حل المسألة بالنسبة للاعب (B)، (Peters, H. 2015).

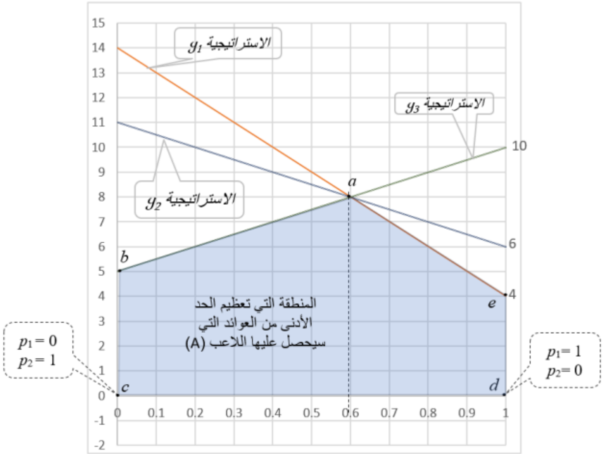
1) حل المسألة بالنسبة للاعبِ (A):

سيتم تمثيل احتمالات استراتيجيات اللاعب (A) هي (p_1 , p_2) ، بحيث تمثل (p_1) احتمال أن يلعب اللاعبِ (A) الإستراتيجية الأولى (x_1) ، وتمثل (p_2) احتمال لعبه للإستراتيجية الثانية (x_2)، و تكون استراتيجيات اللاعب الثاني (B) قيود على اللاعب (A) ، وبهذا تكون إحداثيات هذه القيود كما في الجدول التالي:

جدول رقم (4) إحداثيات استراتيجيات اللاعب (B) بالنسبة للاعب (A)

	y_1	y_2	y_3
$p_1 = 0$ ، $p_2 = 1$	14	11	5
$p_1 = 1$ ، $p_2 = 0$	4	6	10

ويمكن استخدام هذه الإحداثيات في رسم المسألة بالنسبة للاعب (A) ويكون الشكل البياني لها كالتالي:



الشكل رقم (3) حل حالة خاصة لمصفوفة ألعاب من نوع (2×3) بالنسبة للاعب الأرباح (A) ، (إعداد البحاث).

يلاحظ من الرسم البياني إن أفضل حل للاعب (A) والذي يعظم الحد الأدنى من العوائد وتحدده النقطة (a)، وهو أفضل حل في المنطقة (المظللة باللون الأزرق)، ومن هذه النقطة يتم إسقاط عمود لتحديد احتمالات كل إستراتيجية (x_1 , x_2) ، حيث يتبين إن احتمال لعب الإستراتيجية (x_1) هو (p_1= 0.4) ، واحتمال لعب الإستراتيجية (x_2) هو (p_2= 0.6) ، ويتم مد خط أفقي من ذات النقطة (a) لمعرفة قيمة المباراة والتي تساوي (V = 8). ويلاحظ أن هذا الحل مساوي للحل الذي تم الحصول عليه باستخدام طريقة البرمجة الخطية ($p_1 = 0.6$, $p_2 = 0.4$, $V = 8$).كما يلاحظ من الرسم البياني السابق إن هذه الحالة هي حالة خاصة ، حيث يظهر من الرسم إن عدد القيود التي ساهمت في تحديد نقطة الحل (a) ثلاثة قيود (y_1 , y_2 , y_3) وهي استراتيجيات اللاعب (B)، في حين أنه في الحالات الاعتيادية تكون عدد القيود التي تساهم في تحديد نقطة الحل قيدين فقط. وبعد حل المسألة للاعب الأول (A) ننتقل لحل المسألة بالنسبة للاعب (B)

2) حل المسألة بالنسبة للاعبِ (B):

الجدير بالذكر هنا إن نقطة الحل الأمثل للاعب (A) التي تحددها النقطة (a)، تشترك ثلاث استراتيجيات في تحديدها هي (y_1 , y_2 , y_3) ، ووفق آلية عمل نظرية الألعاب فإنه يمكن حل المسألة بالنسبة للاعب (B)، عن طريق أي زوج من هذه الاستراتيجيات{(y_1 , y_2) ، (y_1 , y_3) ، (y_2 , y_3)}. وحتى نتمكن من تحليل هذه الحالة

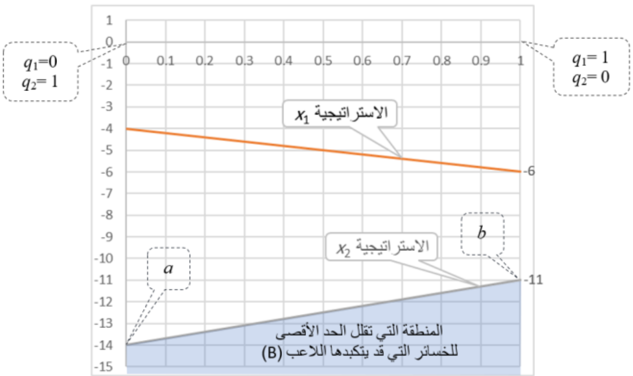
سنقوم بحل المسألة للاعب (B) وفق هذه الأزواج ، ومن تم تحليل الحل لكل زوج منها كالتالي:

أ) حل المسألة بالنسبة للاعب (B) باستخدام الإستراتيجيتين (y_1 و y_2):

وهذا يعني استبعاد الإستراتيجية (y_3) ، وبهذا يمكن اختصار مصفوفة الدفع لتصبح (2×2)، وتكون قيم عناصر المصفوفة سالبة على اعتبار أن اللاعب (B) هو لاعب الخسائر، وبذلك تكون على الشكل التالي:

B.

A		y_1	y_2
	x_1	-4	-6
	x_2	-14	-11



الشكل (4) حل حالة خاصة لمصفوفة الألعاب بالنسبة للعب الخسائر (B) باستخدام استراتيجياته (y_1 ، y_2) ، (إعداد البحاث).

$$q_1 + q_2 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

$$-4q_1 - 6q_2 = -14q_1 - 11q_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

بالتعويض عن قيمة (q_2) في المعادلة (19) والتي تساوي ($q_2 = 1 - q_1$)

$$-4q_1 - 6(1 - q_1) = -14q_1 - 11(1 - q_1)$$

$$-4q_1 - 6 + 6q_1 = -14q_1 - 11 + 11q_1$$

$$2q_1 - 6 = -3q_1 - 11$$

$$5q_1 = -5$$

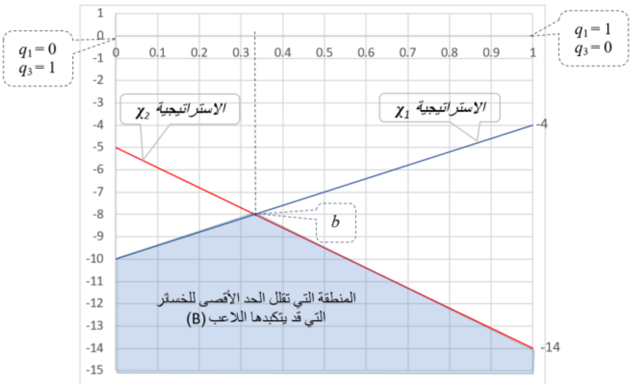
$$q_1 = -1 \quad ، \quad q_2 = 2$$

وهذا غير مقبولاً لأن قيم (q_1 , q_2) عبارة عن احتمالات ويجب أن تكون قيمتها محصورة بين العددين [0 , 1] بمعنى أنها يجب أن تكون ($0 \le q_1 , q_2 \le 1$) ومجموعهما يساوي الواحد الصحيح ($q_1 + q_2 = 1$) .

ب) حل المسألة بالنسبة للاعب (B) باستخدام الإستراتيجيتين (y_1 , y_3):

B

A		y_1	y_3
	x_1	-4	-10
	x_2	-14	-5



الشكل (5) حل حالة مصفوفة الألعاب بالنسبة للاعب الخسائر(B) باستخدام استراتيجياته (y_1 , y_3) ، (إعداد البحاث).

$$q_1 + q_3 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

$$-4q_1 - 10q_3 = -14q_1 - 5q_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

بالتعويض عن قيمة (q_3) في المعادلة (21) والتي تساوي ($q_3 = 1 - q_1$)

$$-4q_1 - 10(1 - q_1) = -14q_1 - 5(1 - q_1)$$

$$-4q_1 - 10 + 10q_1 = -14q_1 - 5 + 5q_1$$

$$6q_1 - 10 = -9q_1 - 5$$

$$15q_1 = 5$$

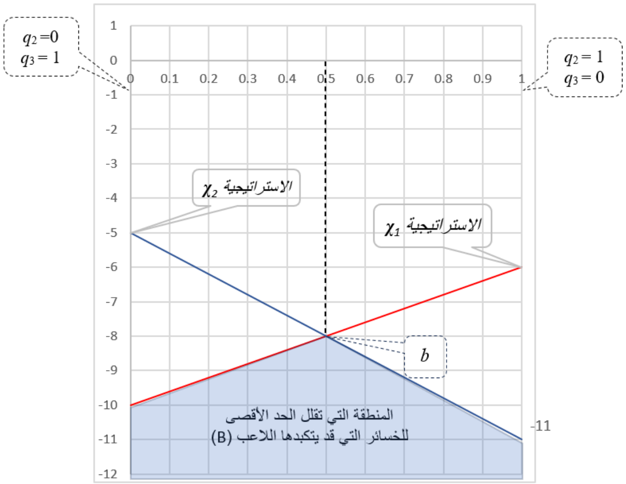
$q_1 = 0.33$ ، $q_3 = 0.67$ ، $V = -8$

ويلاحظ أن هذا الحل صحيح ، فهو يطابق الإجابة بطريقة البرمجة الخطية ، ويعتبر الحل رياضياً مقبولاً لأن قيم (q_1 , q_3) عبارة عن احتمالات وقيمتها وفق هذا الحل محصورة بين العددين [0 , 1]، حيث أن قيمة ($q_1 = 0.33$) وقيمة ($q_3 = 0.67$) ، كما أن مجموعهما يساوي الواحد الصحيح ($q_1 + q_3 = 1$) .

ج) حل المسألة بالنسبة للاعب (B) باستخدام الإستراتيجيتين (y_2 , y_3):

B

A		y_2	y_3
	x_1	−6	−10
	x_2	−11	−5



الشكل (6) حل حالة مصفوفة الألعاب بالنسبة للاعب الخسائر(B) باستخدام استراتيجياته (y_2 , y_3) ، (إعداد البحاث).

$$q_2 + q_3 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

$$-6q_2 - 10q_3 = -11q_2 - 5q_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

بالتعويض عن قيمة (q_3) في المعادلة (23) والتي تساوي ($q_3 = 1 - q_2$)

$$-6q_2 - 10(1 - q_2) = -11q_2 - 5(1 - q_2)$$

$$-6q_2 - 10 + 10q_2 = -11q_2 - 5 + 5q_2$$

$$4q_2 - 10 = -6q_2 - 5$$

$$10q_2 = 5$$

$$q_2 = 0.5$$

$$q_3 = 0.5$$

ونلاحظ هنا أيضاً إن هذا الحل غير مقبول لأنه يخالف الإجابة المتحصل عليها من استخدام النموذج الرياضي للبرمجة الخطية ، فقيم الحل وفق هذه الطريقة ($q_2 = 0.5$, $q_3 = 0.5$) ، في حين أن قيم الحل وفقاً لنموذج البرمجة الخطية يساوي ($q_1 = 0.33$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0.67$) .

تحليل حل المسألة للاعب (B) بالطرق الثلاثة [(y_1 , y_2) , (y_1 , y_3) , (y_2 , y_3)]:

في الفقرة السابقة تم حل المسألة بالنسبة للاعب (B)، عن طريق استخدام الإستراتيجيتين (y_1 , y_2) واستخدام الإستراتيجيتين (y_1 , y_3) واستخدام الإستراتيجيتين (y_2 , y_3) . وفي هذه الفقرة سيتم تحليل الحلول الناتجة من استخدام هذه الطرق الثلاثة .

يلاحظ إن استخدام هذه الطرق الثلاثة أعطى نتائج مختلفة ، حيث كان حل المسألة للاعب (B) كما يلي:

الحل عند استخدام الإستراتيجيتين (y_1 , y_2) هو ($V = -11$ ، $q_1 = -1$ ، $q_2 = 2$) وهو حل غير مقبول.
الحل عند استخدام الإستراتيجيتين (y_1 , y_3) هو ($V = -8$ ، $q_1 = 0.33$ ، $q_3 = 0.67$) وهو حل مقبول ، ويطابق الحل الناتج من استخدام طريقة البرمجة الخطية.

الحل عند استخدام الإستراتيجيتين (y_2 , y_3) هو ($V = -8$ ، $q_2 = 0.5$ ، $q_3 = 0.5$) وهو حل غير مقبول، ولا يطابق الحل الناتج من استخدام طريقة البرمجة الخطية، والذي عنده تكون : يساوي:

$$q_1 = 0.33$$

$$q_3 = 0.67$$

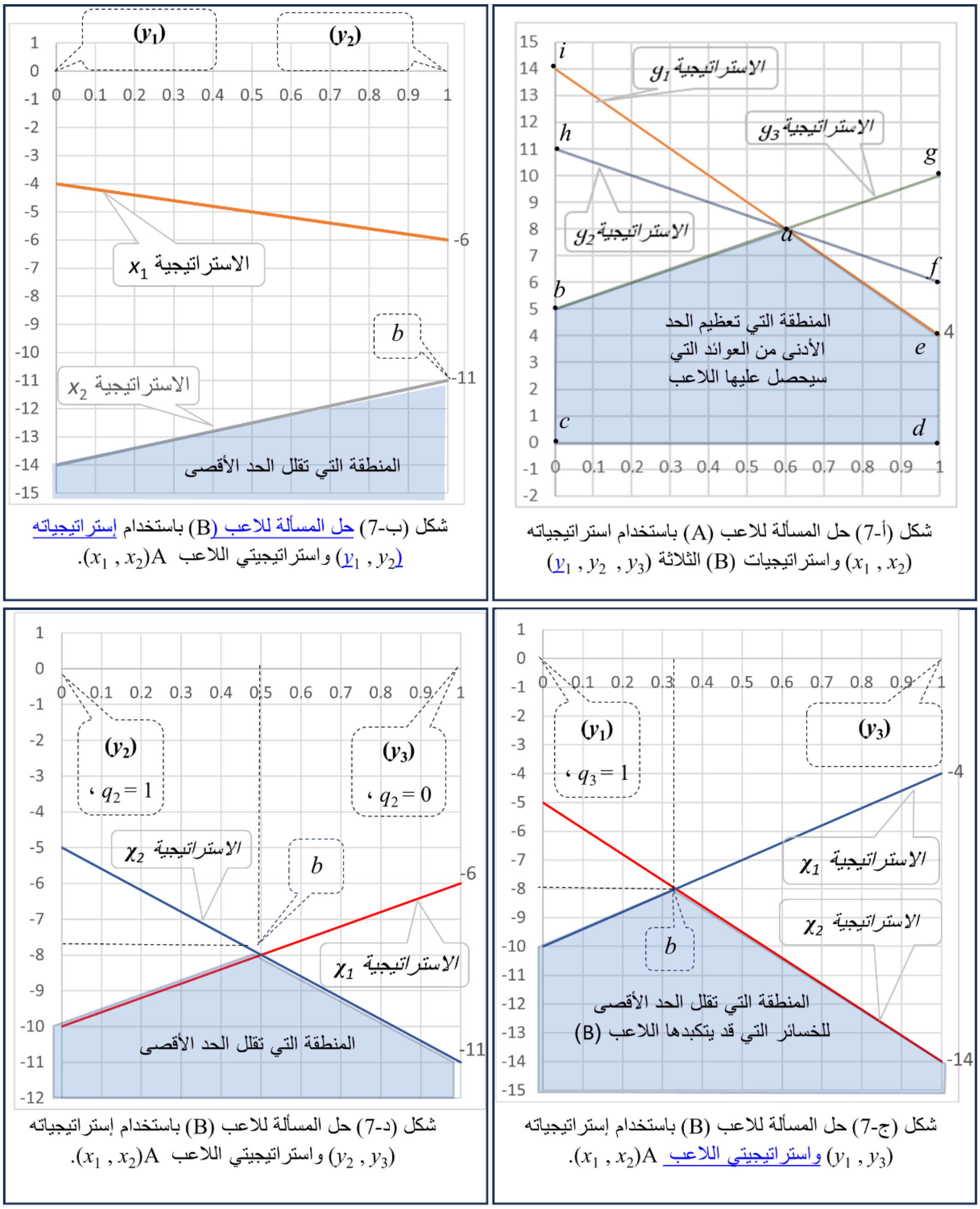
$$V = -8$$

ويلاحظ أن هذا الحل يتوافق فقط مع الحل الذي استخدام الإستراتيجيتين (y_1 , y_3) ، وهذا يعني أن الحلين للأخرين [(y_1 , y_2) , (y_2 , y_3)] واللذين استخداما الإستراتيجية (y_2) هي حلول غير صحيحة.

وعند فحص الشكل البياني (3) الذي يمثل حل المسألة بالنسبة للاعب (A) يتبين أن الإستراتيجية (y_2) لم تساهم في تحديد منطقة الحلول

الممكنة ، وبهذا يمكن اعتبار أن هذه الإستراتيجية عبارة عن قيد غير نشط **(فائض)** في حين أن الإستراتيجيتين (y_1 , y_3) قد شاركت في تحديد منطقة الحلول الممكنة ، وبهذا تعتبر هاتين الإستراتيجيتين **قيود نشطة** .

ويمكن توضيح ذلك بإعادة رسم الشكل البياني (3) في الحالات السابقة سالفة الذكر ، وذلك بحل المسألة بالنسبة للاعب (A) باستخدام الإستراتيجيتين (y_1 , y_2) ، وبالإستراتيجيتين (y_1 , y_3) ، وبالإستراتيجيتين (y_2 , y_3) وذلك كما يلي:



شكل (أ-7) حل المسألة للاعب (A) باستخدام استراتيجياته (x_1 , x_2) واستراتيجيات (B) الثلاثة (y_1 , y_2 , y_3)

شكل (ب-7) حل المسألة للاعب (B) باستخدام إستراتيجياته (y_1 , y_2) واستراتيجيتي اللاعب A(x_1 , x_2).

شكل (ج-7) حل المسألة للاعب (B) باستخدام إستراتيجياته (y_1 , y_3) واستراتيجيتي اللاعب A(x_1 , x_2).

شكل (د-7) حل المسألة للاعب (B) باستخدام إستراتيجياته (y_2 , y_3) واستراتيجيتي اللاعب A(x_1 , x_2).

شكل (7) حل المسألة للاعب (A) واللاعب (B) باستخدام أزواج من استراتيجياته الثلاثة [(y_1 , y_2) , (y_1 , y_3) , (y_2 , y_3)] (إعداد البحاث).

إن الشكل(أ–7) يمثل حل المسألة بالنسبة للاعب (A) باستخدام الاستراتيجيات الثلاثة (y_1 , y_2 , y_3) للاعب (B) ، وإن منطقة الحلول الممكنة محددة بالنقاط (a,b,c,d,e) ، ويتبين من هذا الشكل إن أفضل حل في منطقة الحلول هذه هو الحل عند النقطة (a) ، والتي تكون عندها نتيجة المباراة لهذا اللاعب ($q_1 = 0.33$, $q_2 = 0.67$, $V = 8$)

كما يلاحـظ من الشكل (ب–7) الذي يمثل الحل للاعب (B) باستخدام إستراتيجيتين (y_1 , y_2) وإستراتيجيتي اللاعب (A) (x_1 , x_2) ، ويظهر الحل عند النقطة (b)، إلا إن نقطة الحل هذه غير صحيحة ولا تمثل حل المصفوفة ككل ، لذلك لم تتطابق مع الحل الناتج من طريقة البرمجة الخطية (LP) ، وذلك بسبب استبعاد الاستراتيجية (y_3)، والتي تعتبر قيد نشط شارك في تحديد منطقة الحلول الممكنة كما يظهر في الشكل (أ–7) .

كذلك نلاحظ من الشكل (ج–7) والذي يمثل حل المسألة للاعب (B) باستخدام إستراتيجيته (y_1 , y_3) وإستراتيجيتي اللاعب (A) (x_1 , x_2)، حيث يظهر الحل لهذه المصفوفة عند النقطة (b)، وهو الحل الصحيح للمصفوفة ككل والذي تطابق مع الحل الناتج من استخدام (LP)، وذلك لإنه تم استخدام الاستراتيجيات النشطة (y_1 , y_3)، والتي تحدد منطقة الحلول الممكنة للمصفوفة ككل كما يظهر في الشكل (أ–7) .

أما بالنسبة للشكل (د–7) والذي يمثل الحل باستخدام الإستراتيجيتين (y_2 , y_3) عند النقطة (b)، فهو أيضا لا يمثل الحل الصحيح للمسألة ككل، وذلك لإنه تم استبعاد الاستراتيجية (القيد النشط y_1) ، ولذلك حل هذه المصفوفة لم يتطابق هو أيضاً مع الحل الناتج من تطبيق (LP).

نستخلص من عملية الحل باستخدام هذه الطرق الثلاثة أن الطريقة التي اعتمدت في عملية حلها بيانياً على الإستراتيجيتين (القيدين النشطين) اللذان ساهما في تحديد منطقة الحلول الممكنة (y_1 , y_3) هي الطريقة الوحيدة التي أعطت نتائج تتطابق مع نتائج الحل وفق طريقة (LP) ، أما الطريقتين الأخريين والتي استخدمت الاستراتيجيات[(y_2 , y_3) , (y_1 , y_2)] فهي لم تحقق ذلك ، حيث يتبين إن استخدام القيد غير النشط (y_2) في عملية الرسم هو ما جعل نتائجها غير صحيحة ، فاستخدام هذا القيد كأحد القيود جعل منطقة الحلول الممكنة لهاتين الطريقتين تختلف عن منطقة الحلول الممكنة المحددة بالاستراتيجيات الثلاثة ، وذلك لأن هذا القيد (الإستراتيجية y_2) لم يشترك في تحديد منطقة الحلول الممكنة عند رسمها بالقيود الثلاثة كما يظهر في الشكل (أ–7). وبهذا نستنتج أنه في مثل هذه الحالات وعند حل المباراة بالنسبة للاعب الثاني يجب استخدام القيود النشطة وهي القيود التي ساهمت في تحديد منطقة الحلول الممكنة بالنسبة للاعب الأول ، وبمعنى أخر أنه يجب استبعاد القيد أو القيود غير النشطة (لم تشارك في تحديد منطقة الحلول الممكنة) واعتبارها قيود فائضة حتى ولو ساهم في تحديد نقطة الحل.

8. استنتاجات الدراسة:

إن الطريقة البيانية أداة فعالةفي حل مسائل نظرية الألعاب التي تكون فيها مصفوفات الدفع من نوع (m×2) أو(2×n)، وتتم عملية حل المصفوفة وفقاً لهذه الطريقة البيانية يبدأ بحل المصفوفة أولاً للاعب الذي يمتلك استراتيجيتين وذلك بتمثيل استراتيجياته على شكل محورين للرسم البياني ، وتحديد منطقة الحل له بناءً على استرتيجيات اللاعب الأخر والتي تُعد قيوداً عليه ، وبالتالي يتم تحديد أفضل حل له على أساس القيود التي حددت نقطة الحل ، وبناءً على ذلك يتم حل المصفوفة بالنسبة للاعب الثاني (الذي يمتلك أكثر من استراتيجيتين) .

وقد استنتجت هذه الدراسة عدة نقاط مهمة في تطوير فهم أعمق وفعالة عند استخدام الطريقة البيانية في حل بعض الحالات الخاصة فيها ، وهي كما يلي:

1. أظهرت الدراسة أنه في الحالات الاعتيادية في الطريقة البيانية ، تكون منطقة الحل للاعب الأول (يمتلك استراتيجيتين فقط) محددة بأكثر من استراتيجيتين ، إلا أن نقطة الحل له تكون محددة باستراتيجيتين فقط من أستراتيجيات اللاعب الثاني .
2. باستخدام البرمجة الخطية، توصلت الدراسة إلى أن قيم الحل للمتغيرات يعتمد على عدد القيود المستخدمة في النموذج الرياضي ، فعلى سبيل المثال في حالة مصفوفة من نوع (2×3) ، والتي فيها عدد متغيرات اللاعب الثاني ثلاثة متغيرات (q_1 , q_2 , q_3) و عدد القيود في هذا النموذج اثنان فقط ، فإنه كحد أقصى سيكون هناك قيمتين فقط لمتغيرات الحل، بمعنى أن أحد متغيرات المشكلة (q_1 , q_2 , q_3) ستكون قيمته صفر ، وذلك لإنه وفق طريقة السمبلكس (LP) يتم إدخاله في قيد معين بناءً على مدى تأثير المتغير في دالة الهدف.
3. هذه الدراسة سلطت الضوء على وجود بعض الحالات الخاصة في الطريقة البيانية ، وهي الحالة التي تكون فيها نقطة الحل ناتجة عن تقاطع أكثر من قيدين، وهذا يستدعي تحليلاً أكثر تعقيدًا.
4. أظهرت الدراسة أن في هذه الحالة الخاصة والتي تكون فيها نقطة الحل في الطريقة البيانية محددة بأكثر من قيدين ،فإنه

عند حل المسألة للاعب الثاني يجب استخدام القيدين النشطين ، وهما القيدان اللذان ساهما في تحديد منطقة الحلول الممكنة للاعب الأول ، والذي يعني استبعاده للقيود (غير النشطة) وهي القيود التي لم تساهم في تحديد منطقة الحلول الممكنة واعتبارها قيود فائضة ، هذا النهج يساهم في تبسيط عملية الحل ويضمن الوصول إلى الحل الأمثل للاعب الثاني. إن هذه الدراسة تقدم إضافة مهمة لفهم كيفية التعامل مع القيود المتعددة في الطريقة البيانية، مما يوفر أساسًا لتحسين طرق حل مسائل نظرية الألعاب في الحالات غير التقليدية .

9. الخلاصة Conclusion

هدف هذه الورقة إلى دراسة وتحليل الحالات غير الاعتيادية في حل مسائل نظرية الألعاب باستخدام الطريقة البيانية، وتركزت هذه الدراسة على مسائل المباريات التي تكون فيها مصفوفة الدفع من نوع (m×2) أو(2×n)، أي أن أحد اللاعبين يمتلك استراتيجيتين كحد أقصى ، وتتم عملية حل المصفوفة عن طريق تمثيل استراتيجيات اللاعب الذي يمتلك استرتجيتين على شكل محورين للرسم البياني ، ويتم تمثيل استراتيجيات اللاعب الآخر كخطوط مستقيمة تعكس قيوداً عليه . في الحالات الاعتياديةيتم تحديد نقطة الحل بناءً على تقاطع قيدين فقط، إلا أنه في بعض الحالات يمكن أن تشترك عدة قيود (أكثر من قيدين) في تحدد نقطة الحل .

كما ركزت هذه الورقة على تحليل الحالات الخاصة عن طريق حل مشكلة تجسد هذه الحالة باستخدام طريقة البرمجة الخطية المبرمجة في أداة (Solver) في تطبيق (Excel) ، ومن تم إعادة حلها بيانيا عدة مرات باستخدام عدة توليفات من الاستراتيجيات (زوج من الاستراتيجيات) وتحليل الأشكال البيانية (قيود الرسم) لهذه التوليفات ، ومن تم مقارنة نتائج هذه التوليفات بنتائج الحل الناتجة من استخدام طريقة البرمجة الخطية ،وهو ما يطرح تحدياً إضافياً في استخدام الطريقة البيانية في تحليل هذه الحالات، و تقدم الدراسة إسهاماً مهماً في تطوير فهم أعمق للطريقة البيانية في نظرية الألعاب .

وقد خلصت هذه الدراسة عن طريق هذا التحليل الى تحديد القيود النشطة التي يجب استخدامها عند القيام بعملية الحل باستخدام الطريقة البيانية ، والذي يعني من جهة أخرى تحديد القيود غير النشطة التي يجب استبعادهامن عملية الرسم واعتبارها قيود فائضة وإهمالها عند استخدام الطريقة البيانية في حل مشكلة اللاعب الآخر (الذي يمتلك أكثر من استراتيجيتين).

10. التوصية:

بناءً على االإسهامات البارزة التي وصلت إليها هذه الورقة من تحليل الحالة الخاصة (موضوع البحث) ، نوصي بالبحث عن حالات خاصة أخرى في نظرية الألعاب ومن تم دراستها وتحليلها وفق ذات النهج الذي استخدم في هذه الورقة ، بهدف استكشاف ودراسة بعض المسائل التي تكون ذات طبيعة خاصة في تفاعل قيود المسألة ، مما قد يوفر حلولاً أكثر فعالية لمشاكل معقدة في هذا المجال.

المراجع

- النعيمي، محمد. الحمداني، رفاه. الحمداني، أحمد. (2011). بحوث العمليات ، دار وائل للنشر، الأردن، عمان ط2.
- الجواد، دلال. الفتال، حميد. (2008). بحوث العمليات، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، الأردن، عمان ط العربية.
- Agrawal, B., Kumar, P. (2022). An Approach of L.P.P method –game problem using simplex method. *International Journal of Research and Analytical Reviews (IJRAR), UGC and ISSN Approved-International Peer Reviewed Journal, Refereed Journal, Indexed Journal, Impact Factor, 9 (4)*, 1269-2348.
- Ashour, M. A. H., Al - Dahhan, I. A., & Al - Qabily, S. M. (2020).Solving game theory problems using linear programming and genetic algorithms. In *Human Interaction and Emerging Technologies: Proceedings of the 1st International Conference on Human Interaction and Emerging Technologies (IHIET 2019), August 22-24, 2019, Nice, France* (pp. 247-252). Springer International Publishing.
- Ji, Y., Li, M., & Qu, S. (2018). Multi-objective linear programming games and applications in supply chain competition. *Future Generation Computer Systems*, *86*, 591-597.
- Kearns, M., Littman, M. L., & Singh, S. (2013). Graphical models for game theory. *arXiv preprint arXiv:1301.2281*.

- Peters, H. (2015). *Game theory: A Multi-leveled approach*. Springer. Texts in Business and Economics, Berlin Heidelberg, (2nd ed.)
- Kumar, S., & Reddy, D. S. N. (1999). Graphical solution of (n× m) matrix of a game theory. *European journal of operational research*, *112* (2), 467-471.
- Vang, C. (2022). Implementing the Simplex Algorithm to Solve Zero-Sum Games.
- Von Neumann, J. (1928). Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. Mathematische *Annalen*, *100* (1), 295–320
- Von Neumann, J., & Morgenstern, O. (1944/1947) Theory of games and economic behavior. Princeton: Princeton University Press
- Zermelo, E. (1913). Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. In *Proceedings of the fifth international congress of mathematicians* (Vol. 2, pp. 501-504). Cambridge: Cambridge University Press.