المجلة العلمية لكلية التربية / جامعة سرت / المجلد (5) العدد (1)
Faculty of Education journal / Sirte University (Vol (5) No (1))
Doi (https://doi.org/10.37375/foej.v5i1.3808)
ISSN : 3740-2791
26 يناير 2026

# حل معادلات فولتيرا التكاملية ذات النواة القابلة للفرق باستخدام تحويلات لابلاس

أمبارك أحميد محمد الشاط ، قسم الرياضيات، كلية الآداب والعلوم أوباري، جامعة سبها، ليبيا Amb.ashat@sebhau.edu.ly

مبروكة حسين حيد ، قسم الرياضيات، كلية الآداب والعلوم أوباري، جامعة سبها، ليبيا Mab.mohamed@sebhau.edu.ly

**الملخص**

تعد المعادلات التكاملية أداة رياضية أساسية لنمذجة العديد من الظواهر في الفيزياء والهندسة والبيولوجيا .تركز هذه الدراسة على تطبيق تحويل لابلاس كأسلوب تحليلي فعال لحل معادلة فولتيرا التكاملية الخطية من النوع الثاني، عندما تكون نواة المعادلة دالة للفرق، يمتاز هذا الأسلوب بقدرته على تحويل المعادلة التكاملية إلى معادلة جبرية في مجال تحويل لابلاس، مما يسهل عملية حلها وإيجاد الحل الصريح .تقدم الورقة الإطار النظري لتحويل لابلاس وخواصه، متبوعًا بتصنيف للمعادلات التكاملية، وتختتم بتطبيق عملي عبر أمثلة توضيحية تثبت كفاءة هذه الطريقة وقدرتها على إيجاد حلول دقيقة.

*الكلمات المفتاحية*

**تحويل لابلاس، الحل التحليلي، المعادلات التكاملية، معادلة فولتيرا. النواة القابلة للفرق.**

## Solving Volterra Integral Equations with Difference Kernel Using Laplace Transforms

AMBARK ASHAT Department of Mathematics, Faculty of Arts and Science Ubari, Sabha University, Libya
MABRUKA HAEED Department of Mathematics, Faculty of Arts and Science Ubari, Sabha University,Libya

**Abstract**

**Integral equations are a fundamental mathematical tool for modeling many phenomena in physics, engineering, and biology. This study focuses on the application of the Laplace transform as an effective analytical method for solving linear Volterra integral equations of the second kind, specifically those where the kernel is a function of the difference. The strength of this technique lies in its ability to transform the integral equation into an algebraic equation in the Laplace domain, significantly simplifying the process of finding an explicit solution. The paper presents the theoretical framework of the Laplace transform and its key properties, followed by a classification of integral equations. The method is then demonstrated through practical, solved examples, proving its efficiency and accuracy in obtaining solutions. The results expected to confirm that the Laplace transform method is a powerful and reliable analytical tool for this important class of integral equations.**

**Keywords**

***Analytical Solution, Difference Kernel, Integral Equations, Laplace Transform, Volterra Equation.***

المجلة العلمية لكلية التربية / جامعة سرت/المجلد (5) العدد (1)
Faculty of Education journal / Sirte University (Vol (5) No (1))
Doi (https://doi.org/10.37375/foej.v5i1.3808)
ISSN : 3740-2791
26 يناير 2026

**المقدمة :**

تلعب المعادلات التكاملية دورًا محوريًا في صياغة ووصف العديد من المشكلات العلمية والتطبيقية، بدءًا من نظرية الانتشار والموجات وانتهاءً بمعادلات الاقتصاد الرياضي (بوليانين 2008) و (كيليكمان 2016) مثل إيجاد حلول تحليلية أو عددية لهذه المعادلات تحديًا كبيرًا، مما دفع الباحثين إلى تطوير طرق عديدة ومتنوعة للتعامل معها (وزواز 2011) تنقسم هذه الطرق بشكل أساسي إلى طرق تحليلية، كاستخدام تحويلات متكاملة، وطرق عددية لتقديم حلول تقريبية عندما تعجز الطرق التحليلية (بيداس 2019).

تهدف هذه الورقة إلى تسليط الضوء على إحدى هذه الطرق التحليلية القوية، وهي استخدام تحويل لابلاس لحل فئة محددة ومهمة من المعادلات التكاملية، معادلات فولتيرا ذات النواة التي تعتمد على الفرق، تكمن أهمية هذه الطريقة في قدرة تحويل لابلاس على تبسيط المعادلة التكاملية، التي هي معادلة تختلف فيها الدالة المجهولة تحت علامة التكامل، إلى معادلة جبرية يمكن حلها بسهولة نسبية في مجال التحويل، ومن ثم عكس النتيجة للحصول على الحل في المجال الزمني الأصلي(دكي 2014) و(ملكينجاد 2019).

## 2.تحويل لابلاس :

### 1.2 التعريف والخواص الأساسية

تعريف1:

يعرف تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ المعرفة لجميع $t \geq 0$ بالعلاقة التالية(كريسزج 2018) و (زيل 2018):

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t)dt \qquad (1)$$

حيث ( s عدد مركب) غالبًا ما يؤخذ جزءه الحقيقي كبيرًا بما يكفي لضمان تقارب التكامل.

يُعد تحويل لابلاس مؤثرًا خطيًا، أي أنه يحقق الخاصية الخطية.

نظرية1: إذا كانت $f(t)$ و $g(t)$ دالتين تحويل لابلاس لهما على التوالي

$$L\{g(t)\} = G(s) \;,\; L(\{f(t)\}) = F(s)$$

فإن: −

$$L\{k_1 f(t) + k_2 g(t)\} = k_1 L\{f(t)\} + k_2 L\{g(t)\}$$

لأي عددين حقيقين $k_1 , k_2$ .

هذه النظرية تعرف الخاصية الخطية لتحويل لابلاس.

Doi (https://doi.org/10.37375/foej.v5i1.3808)
ISSN : 3740-2791
26 يناير 2026

### 2.2 شروط الوجود والتقارب (سكيف 2013) و (ديبناث 2016)

لكي يوجد تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ يجب أن تكون الدالة:

1. متصلة جزئيًا على أي فترة محدودة $[0, A]$ .
2. ذات رتبة أسية، أي يوجد ثوابت $M > 0, c$ حيث $|f(t)| \leq Me^{ct}$ لجميع قيم $t$

ضمن هذه الشروط، يتقارب التكامل ويوجد التحويل $F(s)$ لجميع $Re(s) > c$

### 3.2 خواص تحويل لابلاس الهامة

من أهم الخواص التي تستخدم في حل المعادلات التفاضلية والتكاملية (زيل 2018) و (مدلل 2018)

1. تحويل المشتقة:

نظرية2: -

إذا كانت $f(t)$ دالة متصلة ومشتقتها $f'(t)$ متصلة مقطعياً على الفترة $[0 , \infty]$ وكانت لها رتبة أسية وكان تحويل لابلاس للدالة $f$ هو $F(s)$ فإن : -

$$L\{f'(t)\} = SL\{f(t)\} - f(0) = SF(s) - f(0)$$

2. نظرية الإزاحة:

نظرية3: -

إذا كان تحويل لابلاس للدالة $f$ هو الدالة $F(s)$ فإن: -

$$L\{e^{at} f(t)\} = F(s - a)$$

3. نظرية الالتفاف

إذا كان $F(s)$ هو تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ و $G(s)$ هو تحويل لابلاس للدالة $g(t)$ فإن

$$L\{ (f \ * \ g)(t)\} = \ F(s) * G(s)$$

### 4.2 تحويل لابلاس العكسي

إذا كان $L\{ f(t)\} = \ F(s)$ تحويل لابلاس فإن تحويل لابلاس العكسي يُعرف بالعلاقة:

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

ويُستخدم تحويل لابلاس العكسي لإيجاد الدالة الأصلية $f(t)$ .

**5.2 الشروط الكافية لوجود تحويل لابلاس العكسي (زيل 2018): -**

الشروط الكافية لوجود تحويل لابلاس العكسي للدالة $F(s)$ هي: -

1- $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$

2- $\lim_{s\to\infty} S\,F(s) = l < \infty$

نظرية4: -

إذا كان التحويل العكسي للدالتين $F(s)$ , $G(s)$ على التوالي هو

$$L^{-1}\{G(s)\} = g(t) \ , \quad L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

فان: -

$$L^{-1}\{k_1F(s) + k_2G(s)\} = k_1L^{-1}\{F(s)\} + k_2L^{-1}\{G(s)\}$$

لأي عددين حقيقيين $k_2$ , $k_1$

هذه النظرية تعني أن $L^{-1}$ مؤثر خطي.

## 3.المعادلات التكاملية :التعريف والتصنيف

المعادلة التكاملية هي معادلة حيث تظهر الدالة المجهولة $\varphi(x)$ تحت علامة التكامل (بوليانن 2008) و (وزواز 2011).

### 1.3التصنيف حسب الصيغة

### 1.1.3معادلات فردهولم التكاملية: -

في جميع صيغ فردهولم تكون نهاية الجزء العلوي للتكامل عبارة عن ثابت محدد معلوم $b$ وينتمي إلى الفترة $x \in [a \ , \ b]$ وهي كما يلي: -

1- معادلة فردهولم التكاملية من النوع الأول تكون $\mu = 0$ وبالتالي تأخذ الشكل:

$$g(x) + \lambda \int_a^b k(x\,,t)\ \varphi(t)dt = 0 \qquad (2)$$

Doi (https://doi.org/10.37375/foej.v5i1.3808)
ISSN : 3740-2791
26 يناير 2026

2- معادلة فردهولم التكاملية من النوع الثاني وذلك عند فرض ان $\mu = constant \neq 0$

$$\mu\, \varphi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\ \varphi(t)dt \quad (3)$$

3- معادلة فردهولم التكاملية المتجانسة وهي حالة خاصة من $(3)$ حيث نضع $\mu = 1$ في المعادلة $(3)$ فنحصل على:

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\ \varphi(t)dt \quad (4)$$

حيث $\lambda$ يحمل معاني فيزيائية عن خواص المادة.

$k(x,t)$ دالة معلومة وتسمى نواة المعادلة وتحمل صفات وخواص المادة المستخدمة واحياناً تكون متصلة او غير متصلة.

الدالة $g(x)$ دالة معلومة أيضاً وتمثل دالة السطح المراد حساب التكامل عليه.

$\varphi(x)$ هي الدالة المجهولة المطلوب تعيينها وهي تمثل في العلوم الفيزيائية دالة الجهد.

### 2.1.3 معادلات فولتيرا التكاملية الخطية (برونر 2017): -

يكون الشكل القياسي لمعادلات فولتيرا التكاملية الخطية كالتالي:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\ \varphi(t)dt \quad (5)$$

نلاحظ ان معادلة فولتيرا الخطية هي حالة خاصة من معادلة فردهولم التكاملية الخطية وذلك في حال اعتبرنا ان:

$$k(x\ ,t) = 0 \qquad ; \quad x < t \leq b$$

ان قيمة الدالة $\varphi(x)$ في المعادلة السابقة تحدد الأصناف التالية للمعادلات التكاملية الخطية وهي:

1- إذا كانت $\varphi(x) = 0$ فإننا نحصل على معادلة فولتيرا التكاملية الخطية من النوع الأول والتي لها الشكل

Doi (https://doi.org/10.37375/foej.v5i1.3808)
ISSN : 3740-2791
26 يناير 2026

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\ \varphi(t)dt = 0 \qquad (6)$$

2- إذا كانت $\varphi(x) = 1$ فإننا نحصل على معادلة فولتيرا التكاملية الخطية من النوع الثاني (موضوع الدراسة) والتي لها الشكل:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\ \varphi(t)dt \qquad (7)$$

**3.1.3 معادلات غير خطية**: حيث تظهر الدالة المجهولة بشكل غير خطي تحت التكامل، مثل $f(\varphi(t))$

2.3 التصنيف حسب النواة (لازريج 2021) و(ميلكينجاد 2019):

يمكن تقسيم المعادلات التكاملية وتصنيفها بالنسبة للنواة إلى: -

1- معادلات تكاملية ذات نواة $k(x,t)$ متصلة في الفترة $[a,b]$ ولها الشرط $|k(x,t)| \leq M$

حيث $M$ ثابت.

2-معادلات تكاملية ذات نواة شاذة ولها الشرط

$$\left(\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2\, dxdt\right)^{\frac{1}{2}} = c$$

حيث $c$ قيمة محدودة منتهية، وبالتالي فإن المعادلة التكاملية تسمى معادلة تكاملية من نوع فريدهولم.

وتصنف المعادلات التكاملية بحسب النواة الشاذة على النحو التالي: -

1- إذا كانت النواة تأخذ الشكل-

$$k(x,t) = \begin{cases} \dfrac{A(x,t)}{|x-t|^{\alpha}}, \quad 0 \leq \alpha < 1 & (8) \\[2ex] A(x,t)\ln|x-t| & (9) \end{cases}$$

Doi (https://doi.org/10.37375/foej.v5i1.3808)
ISSN : 3740-2791
26 يناير 2026

حيث $A(x\,,t)$ دالة متصلة هي ومشتقاتها.

في هذه الحالة يقال عن المعادلة التكاملية أنها ضعيفة الشذوذ بالنسبة لنواة كارلمان في (8) أو نواة لوغارثمية في (9) .

2- إذا كانت النواة على الشكل: -

$$k(x\,,t)=\frac{B(x\,,t)}{x-t}$$

فأنها تسمى نواة كوشي حيث $B(x\,,t)$ دالة متصلة هي ومشتقاتها.

3- إذا كانت النواة على الشكل: -

$$k(x\,,t)=\frac{C(x\,,t)}{(x-t)^m} \qquad ; \qquad m\geq 2$$

فإن المعادلة التكاملية تسمى معادلة قوية الشذوذ عندما $m=2$ ولكن إذا كانت $m>2$ فإن المعادلة التكاملية تسمى معادلة شديدة الشذوذ حيث $c(x\,,t)$ دالة متصلة هي ومشتقاتها.

4- إذا كانت النواة على الشكل: -

$$k(x\,,t)=\frac{D(x\,,t)}{(x-t)^{\alpha}} \quad ; \quad 0\leq\alpha\leq 1$$

حيث $D(x\,,t)$ دالة متصلة هي ومشتقاتها، وبالتالي فإن المعادلة التكاملية تسمى صيغة آبل.

3- النواة القابلة للفصل (Degenerate Kernel)

تسمى النواة $K(x\,,t)$ نواة قابلة للفصل إذا أمكن التعبير عنها كمجموع عدد من الحدود المنتهية بحيث أن كل حد عبارة عن حاصل ضرب دالة في $x$ فقط ودالة في $t$ فقط كالتالي:

$$k(x\,,t)=\sum_{i=1}^{n}a_i(x)b_i(t) \qquad (10)$$

4- النواة المتماثلة (Symmetric)

Doi (https://doi.org/10.37375/foej.v5i1.3808)
ISSN : 3740-2791
26 يناير 2026

الدالة المركبة القيمة $k(x\,,t)$ تسمى متماثلة إذا كانت $k(x\,,t) = k^{*}(x\,,t)$ حيث أن $(*)$ تعبر عن تبديل متغيرات الدالة.

5- نواة الاختلاف (Difference Kernel) $k(x-\ t)$ هذا النوع هو محور الدراسة الحالية، وهو ما يجعل معادلة فولتيرا معادلة التفافية.

## 4. حل معادلات فولتيرا ذات نواة الاختلاف باستخدام تحويل لابلاس

### 1.4 الصياغة الرياضية للطريقة

نعتبر معادلة فولتيرا من النوع الثاني ذات نواة الاختلاف:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{0}^{x} k(x-t)\,\varphi(t)dt \qquad (11)$$

والتي نواتها $f(\,x) \in L^{2}(\,0, a) \quad , \quad k(\,x\,,t) \in L^{2}(\,0, a)$

باستخدام تعريف الالتفاف يمكن إعادة كتابة المعادلة (11) على النحو التالي:

$$\varphi(x) = f(x) + k(x)^{*}\ \ \varphi(x) \qquad (12)$$

نعتبر هنا ان الدوال $f(x)$ و $\varphi(x)$ و $k(x)$ تمتلك تحويلات لابلاس.

نطبق التحويل على طرفي المعادلة (12) باستخدام نظرية الالتفاف (Borel) والخاصية الخطية، نحصل على:

$$\emptyset(s) = F(s) + K(s)\ \cdot \varphi(s)$$

بحل المعادلة الجبرية لـ $\varphi(s)$ نجد

$$\emptyset(s) = \frac{F(s)}{1 - k(s)} \quad ; \quad (k(s)+1) \qquad (13)$$

وتطبيق تحويل لابلاس العكسي على طرفي المعادلة (13) نحصل على الحل $\varphi(x)$ للمعادلة التكاملية (11) في المجال الأصلي.

### 2.4 أمثلة تطبيقية

مثال 1 أوجد حل المعادلة التكاملية:

Doi (https://doi.org/10.37375/foej.v5i1.3808)
ISSN : 3740-2791
26 يناير 2026

$$\varphi(x) = \sin x + 2\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)dt \quad (14)$$

الحل: -

من تعريف حاصل ضرب اللف فان (14) تكتب:

$$\varphi(x) = \sin x + 2[\cos x^* \varphi(x)] \qquad (15)$$

وبتطبيق تحويل لابلاس لطرفي المعادلة (15) نجد أن:

$$\emptyset(s) = \frac{1}{s^2+1} + 2\frac{s}{s^2+1}\cdot\emptyset(s)$$

ومنه

$$\emptyset(s)\left[1 - 2\frac{s}{s^2+1}\right] = \frac{1}{s^2+1}$$

او

$$\emptyset(s) = \frac{1}{(s-1)^2} \qquad (16)$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي لطرفي (16) نحصل على المعادلة التكاملية

$$\varphi(x) = L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right] = xe^x$$

مثال 2 :أوجد حل المعادلة التكاملية:

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x \sin(x-t)\,\varphi(t)dt \qquad (17)$$

الحل: -

بأخذ تحويل لابلاس لطرفي (17)

$$\emptyset(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2+1}\emptyset(s)$$

ومنها نجد

Doi (https://doi.org/10.37375/foej.v5i1.3808)
ISSN : 3740-2791
26 يناير 2026

$$\emptyset(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3} \qquad (18)$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي لطرفي (18) فان

$$\varphi(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$$

**5. النتائج**

أظهرت هذه الدراسة فعالية تحويل لابلاس كأداة تحليلية قوية ومباشرة لحل معادلات فولتيرا التكاملية الخطية من النوع الثاني عندما تكون النواة دالة للفرق، تمتاز هذه الطريقة بقدرتها على تحويل المشكلة من معادلة تكاملية يصعب حلها إلى معادلة جبرية بسيطة في مجال التحويل .تم التحقق من صحة الطريقة ومن دقة النتائج التي تقدمها من خلال أمثلة تطبيقية واضحة.

**6.التوصيات**

يمكن توسيع نطاق هذه الطريقة ليشمل حل معادلات ذات نوى شاذة، أو معادلات تكاملية-تفاضلية، كما يمكن دمجها مع طرق عددية للحالات التي يصعب فيها إيجاد تحويل عكسي تحليلي دقيق.

**7.المراجع**

1. reyszig, E. (2018). Advanced Engineering Mathematics (10th ed.). John Wiley & Sons.
2. Zill, D. G., & Cullen, M. R. (2018). Differential Equations with Boundary-Value Problems (9th ed.). Cengage Learning.
3. Schiff, J. L. (2013). The Laplace Transform: Theory and Applications. Springer.
4. Dyke, P. P. G. (2014). An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series (2nd ed.). Springer.
5. Polyanin, A. D., & Manzhirov, A. V. (2008). Handbook of Integral Equations (2nd ed.). Chapman and Hall/CRC.
6. Wazwaz, A. M. (2011). Linear and Nonlinear Integral Equations: Methods and Applications. Springer.

7. Jerri, A. J. (2018). Integral and Discrete Transforms with Applications and Error Analysis. CRC Press.
8. Brunner, H. (2017). Volterra Integral Equations: An Introduction to Theory and Applications. Cambridge University Press.
9. Kılıçman, A., & Gadain, H. E. (2016). A note on classification of integral equations and their applications. Journal of Mathematics and Statistics, 12 (1), 49-54.
10. Lazreg, J. E., & Abbas, S. (2021). A Laplace transform approach for solving a class of Volterra integral equations with convolutional kernel. Journal of Applied Mathematics and Computing, 65 (1-2), 687-700.
11. Maleknejad, K., & Saeedi, S. (2019). Numerical solution of Volterra integral equations of the second kind with difference kernel via Laplace transform and operational matrices. Computational and Applied Mathematics, 38 (4), 1-18.
12. Parand, K., & Delkhosh, M. (2017). Solving Volterra integral equations with convolutional kernel using an accurate method. Journal of Computational Science, 20, 0-204.
13. Pedas, A., & Tamme, E. (2019). Numerical methods for weakly singular Volterra integral equations with proportional delays. Journal of Computational and Applied Mathematics, 354, 254-266.
14. Debnath, L., & Bhatta, D. (2016). Integral Transforms and Their Applications (3rd ed.). CRC Press.
15. Al-Mdallal, Q. M. (2018). On the use of Laplace transform for solving certain integro-differential equations. Alexandria Engineering Journal, 57 (4), 2627-2632.